

Matematika helyi tanterv

Hat évfolyamos speciális matematika tagozat

Az 50 éve eredményesen (az első 30 évben négy évfolyamos, az utóbbi 20 évben már hat évfolyamos formában is) működő speciális matematika tagozatok tantervének átalakítása két okból indokolt. Az egyik: a matematikatudomány és a természettudományok fejlődése során felmerülő új problémák beemelése a közoktatásba. A másik: az új (elsősorban informatikai) eszközök alkalmazásának beépítése a tanítás-tanulás folyamatába.

A speciális matematika tagozatos tanterve több cél együttes megvalósulásának szem előtt tartásával készült.

Egyrészt a matematika történeti fejlődésének, ezzel együtt nyitottságának bemutatása abból a célból, hogy a diákok egy-egy probléma megoldása során bátran alkalmazzák a tanult eszközöket, képesek legyenek új összefüggések felismerésére, nyitottak az új, általuk ismeretlen eszközök és módszerek befogadására. Középiskolai tanulmányaik befejeztével motiváltak legyenek a tanultak széleskörű alkalmazására, a megoldatlan problémák megoldásának kutatására. Másrészt cél a matematika „különálló” részterületei (pl. algebra, számelmélet, geometria, analízis) közötti belső összefüggések felismertetése, azok egységben kezelése, valamint a természettudományok matematikai alapjainak tudatosítása, elsajátíttatása.

A speciális matematika tagozaton – a fő célok megvalósítása érdekében – elengedhetetlen a definíciók pontos ismerete, a tételek bizonyítása, az ehhez szükséges módszerek elsajátíttatása.

A tanterv összeállításának legnehezebb eleme annak eldöntése, hogy mely ismeretek átadása „hagyható ki” anélkül, hogy az egységben láttatás ne sérüljön, a tanulók későbbi tanulmányai és munkája során végzendő alkotómunka megalapozása teljes mértékben megtörténjen.

A speciális matematika tagozaton tanító tanároknak éppúgy, mint a közoktatás bármely más területén dolgozóknak, mindenek előtt az *életkori sajátosságok* szem előtt tartása a módszertani alapelvük. A középiskolai tanulmányok hat éve alatt minden évben annyit és csak annyit szabad megtanítani, amennyit a diák teljes mértékben meg tud érteni, be tud építeni a gondolkodásába. A matematikatanítás célja az *alkotó gondolkodásra* nevelés. El kell érni, hogy a diákok meg tudják fogalmazni kérdéseiket, a felvetődött problémákra adott válaszaikat, képesek legyenek gondolataikból és a tanult ismeretekből tiszta, pontos logikai láncot alkotva bizonyítani, cáfolni, új problémákat felvetni. A rendelkezésre álló időkeret meghatározó hányadát a gyakorlás, az alkalmazás kell, hogy kitöltse.

A speciális matematika tagozat egyik megkülönböztető erénye más matematikatanítási formákkal szemben a tanórákra tervezett, *közösségben, azaz osztály/csoportkeretben történő* tehetséggondozás. A diákokat képessé kell tenni arra, hogy társaiktól tanuljanak, társaikkal együttműködve sokszorozzák meg tudásukat, a tanórák minden perce értékes, építő, gazdagító munkával teljen valamennyi diák számára; a differenciált feladatkitűzés és a frontális munka optimális arányainak megválasztásával.

A türelem, az együttműködés, „a szakmai vita”, ezzel a tévedés jogának biztosítása, az elmélyült önálló tevékenység és a közös munka optimális arányának megtalálása a legfontosabb módszertani elemek.

A speciális matematika tagozaton a hagyományos eszközök (tankönyvek, példatárak) továbbra is meghatározó jelentőséggel bírnak. Az informatikai eszközök elsősorban *segédeszközök*, amelyek a szemléltetést segítik és kibővítik az ismeretek alkalmazásának körét. Az eszközök használatának magas szintű ismerete szükséges. Öncélú alkalmazásuk a tanítás folyamatában a speciális matematika tagozaton kontraproduktív lehet. (Elvonhatja a figyelmet a problémafelismeréstől, félrevezetheti a diákot a gondolkodási folyamat hosszát és

lépéseit illetően.) Másrészről viszont a modern matematika tanításának nélkülözhetetlen eszközei, amelyek nélkül az alkalmazásképes tudás és a későbbi alkotómunka elképzelhetetlen. A tanár feladata a helyes arányok megtalálása.

7-8. évfolyam

Az új iskolatípus lehetőséget nyújt arra, hogy pozitív motivációval hozzásegítsünk minden tanulót a matematikai gondolkodás örömeinek megismeréséhez. Tizenhárom éves kortól a tanulók mindinkább általánosító elképzelésekben, elvont konstrukciókban gondolkoznak. Elméleteket gyártanak, összefüggéseket keresnek, próbálják értelmezni a világot. Az iskolai tanítás csak akkor lehet eredményes, ha alkalmazkodik ezekhez a változásokhoz, illetve igyekszik azokat felhasználva fejleszteni a tanulókat. A matematika kiválóan alkalmas arra, hogy a rendszerező képességet és hajlamot fejlessze. Ebben a két évfolyamban mindinkább szükséges matematikai szövegeket értelmezni és alkotni. Segítsük, hogy a tanulók a problémamegoldásaik részeként többféle forrásból legyenek képesek ismereteket szerezni.

Ebben a korban a tanításban már meg kell jelennie az elvonatkoztatás és az absztrakciós készség felhasználásának, fejlesztésének. A matematika tanításában itt jelenik meg a konkrét számok betűkkel való helyettesítése, a tapasztalatok általános megfogalmazása. Ezekben az évfolyamokban már komoly hangsúlyt kell helyeznünk arra, hogy a megsejtett összefüggések bizonyításának igénye is kialakuljon. A definíciókat és a tételeket mind inkább meg kell tudni különböztetni, azokat helyesen kimondani, problémamegoldásban mind többször alkalmazni. A mindennapi élet és a matematika (korosztálynak megfelelő) állításainak igaz vagy hamis voltát el kell tudni dönteni. A feladatok megoldása során fokozatosan kialakul az adatok, feltételek adott feladat megoldásához való szükségessége és elégségessége eldöntésének képessége. A tanítás része, hogy a feladatmegoldás előtt mind gyakrabban tervek, vázlatok készüljenek, majd ezek közül válasszuk ki a legjobbat. Esetenként járunk be több utat a megoldás során, és ennek alapján gondoljuk végig, hogy létezik-e legjobb út, vagy ennek eldöntése csak bizonyos szempontok rögzítése esetén lehetséges. A feladatmegoldások során lehetőséget kell teremteni arra, hogy esetenként a terveket és a munka szervezését a feladatmegoldás közben a tapasztalatoknak megfelelően módosítani lehessen. Egyes feladatok esetén szükséges általánosabb eljárási módokat, algoritmusokat keresni.

A matematika egyes területei más-más módon adnak lehetőséget ebben az életkorban az egyes kompetenciák fejlesztésére. A különböző matematikatanítási módszerek minden tananyagrészen segíthetik a megfelelő önismeret, a helyes énkép kialakítását.

A tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti érdekességek hozzásegítenek az egyetemes kultúra, a magyar tudománytörténet megismeréséhez. A gyakorlati élethez kapcsolódó szöveges feladatok segítik a gazdasági nevelést, a környezettudatos életvitelt, az egészséges életmód kialakítását. A definíciók megtanulása fejleszti a memóriát, a szaknyelv precíz használatára ösztönöz. A geometriai ismeretek elsajátítása közben a tanulók térszemlélete fejlődik, megtanulják az esztétikus, pontos munkavégzést. A halmazszemlélet alakítása és fejlesztése a rendszerező-képességet erősíti. Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezenkívül számonkérésre 10 órát és ismétlésre, rendszerezésre 20 órát terveztünk.

A kiegészítő anyagot *szögletes zárójelbe* tettük.

7. évfolyam

Heti óraszám: 6 óra

Éves óraszám: 216 óra

Témakörök:

Halmazok	17 óra
Logika	6 óra
Számelmélet	22 óra
Algebra	49 óra
Geometria	52 óra
Függvények	24 óra
Kombinatorika	18 óra
Gráfelmélet	10 óra
Algoritmusok	6 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	12 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 17 óra
Előzetes tudás	Adott tulajdonságú elemek halmazba rendezése. Halmazba tartozó elemek közös tulajdonságainak felismerése, megnevezése. Annak eldöntése, hogy egy elem beletartozik-e egy adott halmazba.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek tudatos memorizálása, felidézése. A megtanulást segítő eszközök és módszerek megismerése, értelmes, interaktív használatának fejlesztése. A rendszerezést segítő eljárások megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Halmaz, elem. Halmaz megadási módjai, egy elem csak egyszer szerepel egy halmazban. Halmazok azonossága, üres halmaz.</p> <p>Részhalmaz. n elemű halmaz részhalmazainak a száma.</p> <p>Műveletek halmazokkal: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz.</p> <p>Osztályozás (geometriai alakzatoké, egész számoké).</p> <p>Egyszerű távolságkorlátozással megadott ponthalmazok megkeresése a síkon.</p> <p>Számhalmazok.</p> <p>A halmazalgebra elemi fogalmi és műveleti konkrét számhalmazokon, ponthalmazokon és egyszerű geometriai alakzatokon.</p> <p>Halmazok szemléltetése Venn-diagramon.</p> <p>A szitaformula a legegyszerűbb esetekben (2 és 3 halmazra).</p> <p>A halmazműveletek használata feladatok megoldásánál.</p>		<p><i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szövegértés, szövegértelmezés; lényegkiemelés fejlesztése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Halmaz, elem, részhalmaz; unió, metszet, komplementer halmaz.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	A változás értelmezése egyszerű matematikai tartalmú szövegben. Több, kevesebb, ugyanannyi fogalma. Állítások igazságtartalmának eldöntése. Igaz és hamis állítások megfogalmazása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Szóbeli és írásbeli kifejezőkészség fejlesztése, a matematikai szaknyelv pontos használata. Saját gondolatok megértetésére való törekvés (szóbeli érvelés, szemléletes indoklás).	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Az egyes anyagrészekben felmerülő logikai problémák során tanítandó:</p> <p>Állítások összekapcsolásának értelmezése egyszerű esetekben; egyszerűbb következtetések ellenőrzése. \wedge, \vee, \neg használata rövidítésként. Állítások tagadása, kijelentések közötti „és”, „vagy” kapcsolatok felismerése; egyszerű következtetések helyességének vizsgálata. Bizonyítások. Ekvivalens állítások szerkezetének elemzése; állítások tagadásának megfogalmazása, értelmezése; a De Morgan-szabályok konkrét esetekben. Olyan példák bemutatása, amikor egy állítás cáfolatához elég egy ellenpélda, olyanoké, amikor az állítás bizonyításához minden esetet végig kell vizsgálni. Indirekt bizonyítások konkrét példákon.</p>		<p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> a lényeges és lényegtelen megkülönböztetése.</p> <p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; technika, életvitel és gyakorlat:</i> szövegelemzés, értelmezés, lefordítás a matematika nyelvére.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Állítások, \wedge , \vee , \neg , „minden”, „van olyan”, állítás bizonyítása, példa, ellenpélda.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 22 óra
Előzetes tudás	Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen. Műveletek racionális számokkal. Osztható, osztó, hányados. Többszörös fogalma. Alapműveletek racionális számokkal írásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Tájékozódás a számok világában. Biztos számolási készség törtekkel. Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása. Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése. A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Számelméleti ismeretek összefoglalása.</p> <p>Természetes számok; egész számok; oszthatóság és elemi tulajdonságai; prímszámok és összetett számok; legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös</p> <p>Oszthatósági szabályok összetett számokra vonatkozóan is. Az oszthatóság tulajdonságai. Oszthatósági feladatok megoldása a tanult eszközökkel</p> <p>Négyzet és köbszámok; az egész kitevőjű hatványozás.</p> <p>A számelmélet alaptételének kimondása (bizonyítás nélkül).</p> <p>Prímszámok keresése eratoszthenészi szitával; pozitív egész számok prímtényező felbontása és alkalmazása l.n.k.o. és l.k.k.t. meghatározására.</p> <p>p/q mikor véges, mikor végtelen tizedes tört.</p> <p>Tíz-es számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont</p> <p>[Periodikus törtek összeadása, szorzása.]</p> <p>Biztos számolási készség törtekkel, zsebszámológép használata 3 vagy többjegyű számok prímtényező felbontásához, illetve annak eldöntéséhez, hogy az adott szám prím-e]</p> <p>Relatív prímszámok. $a n$ és $b n$-ből $ab n$ csak relatív prímeke következik, általában $[a,b] n$.</p>	<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz: számítási feladatok.</i></p> <p><i>Kémia: az anyagmennyiség mértékegysége (a mól).</i></p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Oszthatóság; prímszám, összetett szám, maradék, l.n.k.o. és l.k.k.t, oszthatósági szabály.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 49 óra
Előzetes tudás	<p>Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegegyenesen. Alapműveletek.</p> <p>Ellentett, abszolút érték, reciprok.</p> <p>Mérés, mértékegységek használata, átváltás egyszerű esetekben.</p> <p>A mindennapi életben felmerülő egyszerű arányossági feladatok megoldása következtetéssel, egyenes arányosság.</p> <p>A zárójelek, a műveleti sorrend biztos alkalmazása. Helyes és értelmes kerekítés, az eredmények becslése, a becslés használata ellenőrzésre is.</p> <p>Szöveges feladatok megoldása.</p> <p>A százalékszámítás alapjai.</p>	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása. Szavakban megfogalmazott helyzet, történés matematizálása; matematikai modellek választása, keresése, készítése,	

	<p>értelmezése adott szituációkhoz. Konkrét matematikai modellek értelmezése a modellnek megfelelő szöveges feladat alkotásával, majd ezek megoldása különböző algebrai módszerek segítségével.</p> <p>A számfogalom mélyítése.</p> <p>Tisztában lenni a szabványos mértékegységekhez tartozó mennyiségek és többszöröseik, törtrészeik nagyságrendjével.</p>
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Az algebrai ismeretek ismétlése, a betűk célszerű használatának, az algebrai kifejezésekkel való számolás gyakorlása egyszerű azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában. Egyenes és fordított arányosság, százalékláb, százalékvérték.</p> <p>A biztos algebrai készség megalapozása.</p> <p>Számolás algebrai egész kifejezésekkel: zárójelfelbontás, disztributivitás, összevonás $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$ átalakítása.</p> <p>Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel, ellenőrzés.</p> <p>Szöveggel megadott egyszerűbb feladatok lefordítása az algebra nyelvére, egyenletek felállítása.</p> <p>Arányossággal és százalékszámítással, algebrai átalakításokkal megoldható szöveges feladatok; egyszerűbb keverési, mozgásos, munkavégzéses feladatok.</p>	<p><i>Fizika:</i> összefüggések megfogalmazása, leírása a matematika nyelvén.</p> <p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz:</i> számításos feladatok. Út-idő-sebesség összefüggések.</p> <p><i>Kémia:</i> az anyagmennyiség mértékegysége (a mól).</p> <p><i>Földrajz:</i> termelési statisztikai adatok.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	<p>Egyenes és fordított arányosság, százalékláb, százalékvérték. Mérlegelv.</p> <p>Algebrai átalakítás, nevezetes algebrai azonosság, teljes négyzet.</p> <p>Zárójelfelbontás és kiemelés.</p> <p>Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 52 óra
Előzetes tudás	<p>Pont, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, szögtartomány.</p> <p>Háromszögek és csoportosításuk. Négyzetek, speciális négyzetek (trapéz, paralelogramma, deltoid). Kör és részei. Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok. Háromszög, négyzet belső és külső szögeinek összegére vonatkozó ismeretek szemléletes tapasztalatok alapján.</p> <p>Téglatest tulajdonságai.</p> <p>Tengelyesen szimmetrikus alakzatok. Egyszerű alakzatok tengelyes tükröképének megszerkesztése.</p> <p>Két pont, pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága.</p> <p>Szakaszfelezés, szögfelezés, szögmásolás. Merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése. Nevezetes szögek szerkesztése.</p> <p>Szerkesztési eszközök használata.</p> <p>Koordináta-rendszer megismerése, pont ábrázolása, adott pont</p>	

	<p>koordinátáinak a leolvasása. A téglalap kerületének és területének kiszámítása. A téglatest felszínének és térfogatának a kiszámítása.</p>
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>Rendszerező készség fejlesztése. A mindennapi élethez kapcsolódó egyszerű geometriai számítások elvégzésének fejlesztése. A gyakorlatban előforduló geometriai ismereteket igénylő problémák megoldására való képesség fejlesztése. Statikus helyzetek, képek, tárgyak megfigyelése. Geometriai transzformációkban megfigyelt megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. Képzeletben történő mozgatás: átdarabolás elképzelése, testháló összehajtásának, szétvágásának elképzelése. A pontos munkavégzés és a bizonyítás igényének fejlesztése. A problémamegoldás lépéseinek megismertetése (szerkesztésnél: vázlatrajz, adatfelvétel, a szerkesztés menete, szerkesztés, diszkusszió).</p>
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>A geometria tanult fogalmainak alapos átisméltése. Mit értünk egy alakzat megszerkesztésén? A szerkesztés lehetséges alaplépései. A körző és vonalzó biztos használata. Dinamikus geometriai szoftverek használata, ha elérhető.</p> <p>Első ismerkedés az egybevágósági transzformációkkal.</p> <p>Pont, egyenes, sík, tér, párhuzamosság, merőlegesség a szög. Nevezetes szögpárok.</p> <p>Háromszög és konvex sokszög szögeinek összege, külső szögeinek összege, átlóinak száma. Összefüggés a háromszög oldalai, szögei, oldalai és szögei között.</p> <p>Egyszerű, távolsággal jellemzett ponthalmazok ábrázolása.</p> <p>A kör, középpontja, sugara, átmérője, húrja, érintője, szelője.</p> <p>A szakaszfelező merőleges (egyenes, ill. sík) mint ponthalmaz (mértani hely).</p> <p>Egyszerű, tengelyesen szimmetrikus alakzatok.</p> <p>A szögfelezők, mint ponthalmazok (mértani helyek).</p> <p>A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást.</p> <p>Speciális háromszögek, négyszögek tulajdonságai. Ezek szerkesztése</p> <p>Szabályos sokszögek.</p> <p>A háromszög köré írt kör, a háromszögbe írt kör; a háromszöghöz írt érintő körök.</p> <p>Háromszögek egybevágósága.</p> <p>Konkrét alakzatok tükrözése (egyenesre, pontra), eltolása, elforgatása, középpontos kicsinyítése, nagyítása.</p> <p>Tengelyes és középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, ezek tulajdonságai.</p> <p>Egyszerű szerkesztési és bizonyítási feladatok a tanult</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> a hétköznapi problémák területtel kapcsolatos számításai (lefedések, szabászat, földmérés); műszaki rajz készítése.</p> <p><i>Vizuális kultúra:</i> Pantheon, Colosseum. Művészeti alkotások megfigyelése a tanult transzformációk segítségével. Festmények, művészeti alkotások egybevágó geometriai alakzatai.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szabatos fogalmazás</p> <p><i>Vizuális kultúra; biológia-egészségtan:</i> középpontosan szimmetrikus alakzatok megfigyelése, vizsgálata a természetben és a műalkotásokban, festmények, művészeti alkotások egybevágó geometriai alakzatai.</p>

<p>transzformációk és a megismert fogalmak alkalmazására mértani helyes feladatok. Szimmetrián alapuló játékok. Kerület, terület, felszín, térfogat kiszámítása (sokszögek és a kör kerülete, háromszög, téglalap, paralelogramma, trapéz, kör területe, kocka, téglatest).</p> <p>Pitagorasz tétele. Nevezetes négyszögek Thalész tétele. Háromszög nevezetes vonalai, pontjai. Kör érintőjének szerkesztése. Helyvektor, vektor (szemléletesen). <i>Matematikatörténet:</i> Descartes, Pitagorasz, Thalész</p>	<p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> Thalész, Pitagorasz és kora.</p> <p><i>Fizika:</i> az erő fogalma, felbontása, erők összege, különbsége.</p>
--	--

<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Geometriai transzformáció, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés és forgatás, eltolás. Egybevágóság. Középpontos és tengelyes szimmetria. Nevezetes négyszögek. Egyállású szög, váltószög, csúcsszög. Belső és külső szögfelező. Pont, egyenes szakasz, sík, tér, test. Sokszög, kör. Érintő, szelő, húr, sugár, átmérő. Háromszög, középvonal, súlyvonal, súlypont, magasság, magasságpont, oldalfelező merőleges, szögfelező. A háromszög és sokszög külső és belső szögei. A háromszög nevezetes körei. Szerkesztés és diszkusszió. Vektor.</p>
---------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények	Órakeret 24 óra
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Helymeghatározás gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. Számegyenes, számintervallumok ábrázolása, leolvasása ábráról. Pont koordinátáinak ismerete Descartes-féle koordináta-rendszerben. Sorozatok folytatása adott szabály szerint, szabályfelismerés.</p>	
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>Síkbeli tájékozódás. Kapcsolat teremtése a természettudomány látszólag távol eső területei között. Függvény-transzformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénymodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába.</p>	
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>		<p>Kapcsolódási pontok</p>

<p>A függvényfogalom megalapozása egyszerű példák alapján. Hozzárendelés; értelmezési tartomány; képhalmaz; értékészlet.</p> <p>Derékszögű koordináta-rendszer, origó, abszcissza, ordináta.</p> <p>Az alábbi hozzárendeléssel megadott (alapvető) függvények ismerete és ábrázolása:</p> <p>$x \mapsto ax+b$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto ax^2+bx+c$; $x \mapsto x$; $x \mapsto \frac{1}{x}$;</p> <p>$x \mapsto \frac{ax+b}{x+c}$; $x \mapsto \{x\}$; $x \mapsto [x]$; $x \mapsto \text{sgn } x$</p> <p>Függvény ábrázolása értéktáblázat és képlet alapján, illetve adatok leolvasása a grafikonról. Másodfokú függvény teljes négyzetté alakítása.</p> <p>Néhány lépéses transzformációt igénylő függvények ábrázolása függvénytranszformációk [$f(x) + c$; $f(x+c)$; $c \cdot f(x)$] segítségével.</p>	<p><i>Fizika:</i> A sebesség és az út-idő grafikon kapcsolata; az ellenállás és a feszültség-áramerősség grafikon kapcsolata. A gyorsuló mozgás út-idő grafikonja.</p> <p><i>Biológia-egészségtan; fizika; kémia:</i> mérési eredmények kiértékelése grafikonok alapján.</p>
--	--

<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszer, origó, abszcissza, ordináta.</p> <p>Függvény. Függvény grafikonja. Értelmezési tartomány, értékészlet, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás.</p> <p>Egyenes ábrázolása; lineáris függvény, meredekség. Abszolútérték-függvény, másodfokú függvény, reciprokn függvény.</p>
---------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	Elemek sorba rendezése, adott szempont szerinti kiválasztása, gráf használata egyszerű leszámolási feladatokban. Összeszámlálás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A kombinatorikai problémák felfedezése a hétköznapi életben, modellek alkalmazása. A rendszerező képesség, a figyelem fejlesztése. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban. A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése. A rekurziós gondolat és a „vegyük a szélsőt” gondolat bevezetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A kombinatorikai ismeretek rendszerezése: összeszámlálás, skatulyaelv, szöveges feladatok.</p> <p>A faktoriális. Permutáció. $\binom{n}{k}$</p> <p>Leszámlálási feladatok; tudatos leszámolási módszerek kialakítása. Skatulyaelves feladatok.</p> <p>Egyszerű kombinatorikai játékok.</p>		<p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p> <p><i>Informatika:</i> algoritmus, ciklus; elágazás.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Leszámlálás, permutáció, skatulyaelv, kombinatorikai játék.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Sorba rendezési és kiválasztási feladatok, gráf használata feladatmegoldásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A gráfelmélet egyszerű alapfogalmai és a gráfok felhasználása feladatmegoldásokban: Gráf (egyszerű), csúcs, él, pont fokszáma; fa konkrét feladatokban. Euler-körséta és séta konkrét feladatokban. Fokszámok összege páros; Euler-körséta és –séta létezésének feltétele. Teljes gráf, üres gráf, izolált pont.</p> <p>Permutációk ábrázolása gráffal; osztók fája. Ismeretségre, rokonságra vonatkozó (tehát gráffal szemléltethető) egyszerű feladatok. Út, kör, összefüggő gráf (szemléletesen). A komplementer gráf.</p>		<p><i>Több tantárgy:</i> fogalmi rendszerezéséhez használhatók pl. a fagráfok.</p> <p><i>Kémia:</i> szénhidrogénekben hidrogének számának paritása.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Egyszerű gráf, fokszám, élszám, teljes gráf, összefüggő gráf. Euler-körséta és –séta.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	Kiválasztási feladat, aritmetikai műveleti algoritmusok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algoritmusok a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban, játékokban. Algoritmusok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>A témakör nagy részét más anyagrészekben tárgyaljuk.</i></p> <p>Ismerkedés az algoritmusokkal, elsősorban konkrét matematikai játékokon, keresési feladatokon és egyszerű aritmetikai, kombinatorikai módszereken keresztül.</p> <p>Aritmetikai algoritmusok: alpműveletek „iskolai algoritmusa”, összeadás, kivonás, szorzás és maradékos osztás módszere „papíron, ceruzával.” Átváltás számrendszerek között.</p> <p>Diszkrét matematikai játékok: „Biztosan nyerünk”, „adott lépésszám mellett biztosan találunk”; „nyerő helyzet”, „vesztő helyzet”</p>		<p><i>Informatika:</i> Keresési és kiválasztási algoritmusok, algoritmus lépésszámának elemzése.</p>

fogalmának kialakítása konkrét játékok példáján keresztül. Játékok szimmetriája konkrét, egyszerű példákon.		
Kombinatorikai algoritmusok: permutációk, variációk, kombinációk, partíciók <i>felsorolása</i> . Permutációk felsorolása lexikografikus sorrendben.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Algoritmus. Nyerő helyzet, vesztes helyzet, nyerő stratégia.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 12 óra
Előzetes tudás	Egyszerű leszámolások elvégzése, koordináta-rendszer fogalma, szög mérés és egyszerű geometriai szerkesztési feladatok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A leíró statisztika alapfogalmainak megértése és használata gyakorlati feladatokban. Adatsorok grafikus megjelenítésének megismerése, olvasása és készítése, kész grafikonok elemzése. A leíró statisztika alapfogalmai segítségével a valószínűség alapfogalmainak megismerése, alkalmazása egyszerű problémákban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Egyszerű játékokon keresztül a valószínűség szemléletes fogalmának bevezetése. [Tippelős játékok, kockadobás, sorsolások.] A kísérletekben tapasztalt relatív gyakoriság alapján az elemi esemény, esemény, valószínűség fogalmának szemléletes bevezetése.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Esemény, elemi esemény, klasszikus valószínűségi modell.	

8. évfolyam

Heti óraszám: 6 óra

Éves óraszám: 216 óra

Témakörök:

Halmazok	11 óra
Logika	5 óra
Számelmélet	20 óra
Algebra	38 óra
Geometria	56 óra
Függvények	40 óra
Kombinatorika	16 óra
Gráfelmélet	12 óra
Algoritmusok	10 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	8 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 11 óra
Előzetes tudás	Adott tulajdonságú elemek halmazba rendezése. Halmazba tartozó elemek közös tulajdonságainak felismerése, megnevezése. Annak eldöntése, hogy egy elem beletartozik-e egy adott halmazba.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek tudatos memorizálása, felidézése. A megtanulást segítő eszközök és módszerek megismerése, értelmes, interaktív használatának fejlesztése. A rendszerezést segítő eljárások megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Részhalmaz. n elemű halmaz részhalmazainak a száma. (ismétlés)</p> <p>Műveletek halmazokkal: unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz.</p> <p>Egyszerű távolságkorlátozással megadott ponthalmazok megkeresése a síkon.</p> <p>A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei konkrét számhalmazokon, ponthalmazokon és egyszerű geometriai alakzatokon.</p> <p>Intervallumok. Egyszerű ponthalmazok meghatározása a derékszögű koordinátarendszerben.</p> <p>A szitaformula a legegyszerűbb esetekben (2 és 3 halmazra).</p> <p>A halmazműveletek használata feladatok megoldásánál.</p>		<p><i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szövegértés, szövegértelmezés; lényegkiemelés fejlesztése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Halmaz, elem, részhalmaz; unió, metszet, komplementer halmaz.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 5 óra
Előzetes tudás	A változás értelmezése egyszerű matematikai tartalmú szövegben. Több, kevesebb, ugyanannyi fogalma. Állítások igazságtartalmának eldöntése. Igaz és hamis állítások megfogalmazása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Szóbeli és írásbeli kifejezőkészség fejlesztése, a matematikai szaknyelv pontos használata. Saját gondolatok megértetésére való törekvés (szóbeli érvelés, szemléletes indoklás).	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Az egyes anyagrészekben felmerülő logikai problémák során tanítandó:</p> <p>Állítások összekapcsolásának értelmezése egyszerű esetekben; egyszerűbb következtetések ellenőrzése.</p> <p>Bizonyítások.</p> <p>Összetett állítások tagadása.</p> <p>Ekvivalens állítások szerkezetének elemzése; állítások tagadásának megfogalmazása, értelmezése; a De Morgan-szabályok konkrét esetekben.</p> <p>Olyan példák bemutatása, amikor egy állítás cáfolatához elég egy ellenpélda, olyanoké, amikor az állítás bizonyításához minden esetet végig kell vizsgálni. Példákon keresztül tisztázni a minimum és az alsó becslés közti különbséget.</p> <p>Indirekt bizonyítások konkrét példákon.</p>		<p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> a lényeges és lényegtelen megkülönböztetése.</p> <p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; technika, életvitel és gyakorlat:</i> szövegelemzés, értelmezés, lefordítás a matematika nyelvére.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Állítások, \wedge , \vee , \neg , „minden”, „van olyan”, állítás bizonyítása, példa, ellenpélda.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen. Műveletek racionális számokkal. Osztandó, osztó, hányados. Többszörös fogalma. Alapműveletek racionális számokkal írásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Tájékozódás a számok világában. Biztos számolási készség törtekkel. Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása. Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése. A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Számelméleti ismeretek összefoglalása.</p> <p>Oszthatóság és elemi tulajdonságai; legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös</p> <p>Oszthatósági szabályok.</p> <p>p/q mikor véges, mikor végtelen tizedes tört.</p> <p>Tíz-es számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont. Összeadás és kivonás nem 10-es alapú számrendszerben</p> <p>Egyszerű számelméleti függvények ($d(n)$ és $\varphi(n)$ 2-3 prímosztó esetén).</p> <p>$[d(n) = k$ alakú egyenletek megoldása. $ax + by = c$ megoldása általánosítás nélkül konkrét esetekben.]</p> <p>$\sqrt{2}, \sqrt{n}$ irracionális. [Több bizonyítás.]</p> <p>A prímek száma végtelen, bizonyítással</p> <p>Az euklideszi algoritmus alkalmazása két szám l.n.k.o.-jának megkeresésére konkrét esetekben.</p> <p>Műveletek (osztási) maradékokkal.</p> <p>Történeti érdekességek a számelmélettel kapcsolatban.</p>	<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz: számítási feladatok.</i></p> <p><i>Kémia: az anyagmennyiség mértékegysége (a mól).</i></p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Oszthatóság; prímszám, összetett szám, maradék, euklideszi algoritmus, l.n.k.o. és l.k.k.t, oszthatósági szabály.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 38 óra
Előzetes tudás	<p>Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegegyenesen. Alapműveletek.</p> <p>Ellentett, abszolút érték, reciprok.</p> <p>Mérés, mértékegységek használata, átváltás egyszerű esetekben.</p> <p>A mindennapi életben felmerülő egyszerű arányossági feladatok megoldása következtetéssel, egyenes arányosság.</p> <p>A zárójelek, a műveleti sorrend biztos alkalmazása. Helyes és értelmes kerekítés, az eredmények becslése, a becslés használata ellenőrzésre is.</p> <p>Szöveges feladatok megoldása.</p> <p>A százalékszámítás alapjai.</p>	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása. Szavakban megfogalmazott helyzet, történés matematizálása; matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz. Konkrét matematikai modellek értelmezése a modellnek megfelelő szöveges feladat alkotásával, majd ezek megoldása különböző algebrai módszerek segítségével.</p> <p>A számfogalom mélyítése.</p>	

	Tisztában lenni a szabványos mértékegységekhez tartozó mennyiségek és többszöröseik, törtrészeik nagyságrendjével.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Számolás algebrai egész kifejezésekkel: zárójelfelbontás, disztributivitás, összevonás $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$ átalakítása.</p> <p>Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel, ellenőrzés.</p> <p>Arányossággal és százalékszámítással, algebrai átalakításokkal megoldható szöveges feladatok; keverési, mozgásos, munkavégzéses feladatok.</p> <p>Egyszerű nevezetes algebrai azonosságok; $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^3 + b^3$ szorzattá alakítása □ teljes négyzet és teljes köb. Nevezetes azonosságok és a szorzattá alakítás szerepe egyenletek megoldásában.</p> <p>Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása; teljes négyzet és köb felismerése □ a megismert azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban.</p> <p>Lineáris kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.</p> <p>A számfogalom bővítése.</p> <p>A négyzetgyök. Irracionális számok. Egy számhalmaz adott műveletre nézve zárt. \sqrt{n} milyen n-re irracionális.</p> <p>Két szám számtani, mértani közepe.</p>	<p><i>Fizika:</i> összefüggések megfogalmazása, leírása a matematika nyelvén.</p> <p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz:</i> számításos feladatok. Út-idő-sebesség összefüggések.</p> <p><i>Kémia:</i> az anyagmennyiség mértékegysége (a mól).</p> <p><i>Földrajz:</i> termelési statisztikai adatok.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Egyenes és fordított arányosság, százalékláb, százaléktér. Mérlegelv. Algebrai átalakítás, négyzetgyök, nevezetes algebrai azonosság, teljes négyzet. Zárójelfelbontás és kiemelés. Irracionális számok. Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, egyenletrendszer.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 56 óra
Előzetes tudás	<p>Pont, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, szögtartomány.</p> <p>Háromszögek és csoportosításuk. Négyyszögek, speciális négyyszögek (trapéz, paralelogramma, deltoid). Kör és részei. Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok. Háromszög, négyyszög belső és külső szögeinek összegére vonatkozó ismeretek szemléletes tapasztalatok alapján.</p> <p>Téglatest tulajdonságai.</p> <p>Tengelyesen szimmetrikus alakzatok. Egyszerű alakzatok tengelyes tükröképének megszerkesztése.</p> <p>Két pont, pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága.</p> <p>Szakaszfelezés, szögfelezés, szögmásolás. Merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése. Nevezetes szögek szerkesztése.</p> <p>Szerkesztési eszközök használata.</p> <p>Koordináta-rendszer megismerése, pont ábrázolása, adott pont koordinátáinak a leolvasása.</p> <p>A téglalap kerületének és területének kiszámítása.</p>	

	A téglatest felszínének és térfogatának a kiszámítása.
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>Rendszerező készség fejlesztése.</p> <p>A mindennapi élethez kapcsolódó egyszerű geometriai számítások elvégzésének fejlesztése. A gyakorlatban előforduló geometriai ismereteket igénylő problémák megoldására való képesség fejlesztése. Statikus helyzetek, képek, tárgyak megfigyelése. Geometriai transzformációkban megfigyelt megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása.</p> <p>Képzeletben történő mozgató: átdarabolás elképzelése, testháló összehajtásának, szétvágásának elképzelése.</p> <p>A pontos munkavégzés és a bizonyítás igényének fejlesztése.</p> <p>A problémamegoldás lépéseinek megismertetése (szerkesztésnél: vázlatrajz, adatfelvétel, a szerkesztés menete, szerkesztés, diszkusszió).</p>
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Első ismerkedés a középpontos hasonlósággal.</p> <p>Hasáb, henger, gúla, kúp, gömb. Alaplap, alapél, oldallap, oldalél. Egyszerűbb testek hálója. Ismerkedés a szabályos testekkel.</p> <p>Háromszög és konvex sokszög szögeinek összege, külső szögeinek összege, átlóinak száma. Összefüggés a háromszög oldalai, szögei, oldalai és szögei között. (ismétlés)</p> <p>Egybevágósági transzformációk (ismétlés)</p> <p>Merőleges vetítés.</p> <p>Egyszerű szerkesztési és bizonyítási feladatok a tanult transzformációk és a megismert fogalmak alkalmazására mértani helyes feladatok.</p> <p>Szerkesztések diszkussziója (hány megoldás van, van-e mindig megoldás).</p> <p>Kerület, terület, felszín, térfogat kiszámítása (sokszögek és a kör kerülete, háromszög, téglalap, paralelogramma, trapéz, kör területe, kocka, téglatest, egyenes hasáb, gúla, kúp, henger, gömb, felszín és térfogat képlete).</p> <p>Nevezetes négyszögek, magassága, középvonala</p> <p>Thalész és Pithagorasz tétele. (alkalmazások)</p> <p>Középpontos hasonlóság és tulajdonságai bizonyítás nélkül.</p> <p>Szakasz arányos osztásának szerkesztése.</p> <p>Háromszög nevezetes vonalai, pontjai.</p> <p>Kör érintőjének, két kör közös érintőinek, adott kört és egyenest érintő kör szerkesztése.</p> <p>Helyvektor, vektor; vektorokkal végzett alapl műveletek és alkalmazásaik, vektor felbontása összetevőkre (szemléletesen).</p> <p><i>Matematikatörténet:</i></p> <p>Descartes, Pitagorasz, Thalész</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> a hétköznapi problémák területtel kapcsolatos számításai (lefedések, szabászat, földmérés); műszaki rajz készítése.</p> <p><i>Vizuális kultúra:</i> Pantheon, Colosseum. Művészeti alkotások megfigyelése a tanult transzformációk segítségével. Festmények, művészeti alkotások egybevágó geometriai alakzatai.</p> <p><i>Vizuális kultúra; biológia-egészségtan:</i> Valós tárgyak arányosan kicsinyített vagy nagyított rajza.</p> <p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> Thalész, Pitagorasz és kora.</p> <p><i>Fizika:</i> az erő fogalma, felbontása, erők összege, különbsége.</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	<p>Geometriai transzformáció, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés és forgatás, eltolás. Egybevágóság. Középpontos hasonlóság. Hasáb, henger, gúla, kúp, gömb. Alaplap, alapél, oldallap, oldalél.</p> <p>Háromszög, középvonal, súlyvonal, súlypont, magasság, magasságpont, oldalfelező merőleges, szögfelező. A háromszög és sokszög külső és belső szögei.</p> <p>A háromszög nevezetes körei. Szerkesztés és diszkusszió. Vektor.</p>	
Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	<p>Helymeghatározás gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. Számegyenes, számintervallumok ábrázolása, leolvasása ábráról. Pont koordinátáinak ismerete Descartes-féle koordináta-rendszerben. Sorozatok folytatása adott szabály szerint, szabályfelismerés.</p>	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>Síkbeli tájékozódás. Kapcsolat teremtése a természettudomány látszólag távol eső területei között. Függvény-transzformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénymodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába.</p>	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Sorozatok. Számítási és mértani sorozat. Hozzárendelés; értelmezési tartomány; képhalmaz; értékészlet. Az alábbi hozzárendeléssel megadott (alapvető) függvények ismerete és ábrázolása és jellemzése zérushelyek, paritás, korlátosság, szélsőérték, periodikusság, monotonitás szempontjából:</p> <p>$x \mapsto ax+b$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto ax^2+bx+c$; $x \mapsto x$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{ax+b}{x+c}$; $x \mapsto \{x\}$; $x \mapsto [x]$; $x \mapsto \operatorname{sgn} x$</p> <p>Néhány lépéses transzformációt igénylő függvények ábrázolása függvénytranszformációk [$f(x) + c$; $f(x+c)$; $c \cdot f(x)$] segítségével. Egyenletek és egyenlőtlenségek, szélsőérték feladatok grafikus megoldása.</p>		<p><i>Fizika; biológia-egészségtan; kémia; földrajz:</i> függvényekkel leírható folyamatok.</p> <p><i>Fizika:</i> A sebesség és az út-idő grafikon kapcsolata; az ellenállás és a feszültség-áramerősség grafikon kapcsolata. A gyorsuló mozgás út-idő grafikonja.</p> <p>.</p> <p><i>Biológia-egészségtan; fizika; kémia:</i> mérési eredmények kiértékelése grafikonok alapján.</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszer, origó, abszcissza, ordináta. Függvény. Függvény grafikonja. Értelmezési tartomány, értékészlet, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás. Paritás, korlátosság. Egyenes ábrázolása; lineáris függvény, meredekség. Abszolútérték-függvény, másodfokú függvény, reciprok függvény.
------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 16 óra
Előzetes tudás	Elemek sorba rendezése, adott szempont szerinti kiválasztása, gráf használata egyszerű leszámolási feladatokban. Összeszámlálás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A kombinatorikai problémák felfedezése a hétköznapi életben, modellek alkalmazása. A rendszerező képesség, a figyelem fejlesztése. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban. A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése. A rekurziós gondolat és a „vegyük a szélsőt” gondolat bevezetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A faktoriális. Permutáció. $\binom{n}{k}$</p> <p>Sokszög átlóinak a száma. Véges halmaz részhalmazainak száma.</p> <p>A Pascal-háromszög legegyszerűbb tulajdonságai. $\binom{n}{k}$ kapcsolata a Pascal-háromszöggel.</p> <p>Skatulyaelves feladatok; az állapotfüggvényt előkészítő egyszerű feladatok: invarianciával bizonyítható feladatok.</p> <p>A Fibonacci-sorozat. A teljes indukció és a rekurzív gondolkodásmód előkészítése.</p> <p>„Vegyük a legszélsőt” gondolat.</p> <p>Feladatok a kombinatorikus geometria köréből.</p>		<p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p> <p><i>Informatika:</i> algoritmus, ciklus; elágazás.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Leszámlálás, permutáció, skatulyaelv, Pascal-háromszög.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 12 óra
Előzetes tudás	Sorba rendezési és kiválasztási feladatok, gráf használata feladatmegoldásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Fokszámok összege páros; Euler-körséta és –séta létezésének feltétele. Turán tétel egyszerű esetekben.</p> <p>Permutációk ábrázolása gráffal; osztók fája; részhalmazok ábrázolása bináris fákkal; leszámolási feladatok megoldása fákkal. Egyszerű Ramsey-típusú feladatok konkrét, kis számokra.</p> <p>Út, kör, összefüggő gráf (szemléletesen). Fa és feszítő fa fogalmát előkészítő feladatok. Irányított gráf [és tournament (körmérkőzés)] fogalmát előkészítő feladatok.</p> <p>A komplementer gráf. A páros gráf fogalma.</p> <p>Ismerkedés a síkba rajzolható gráfokkal.</p>		<p><i>Több tantárgy:</i> fogalmi rendszerezéséhez használhatók pl. a fagráfok.</p> <p><i>Kémia:</i> szénhidrogénekben hidrogének számának paritása.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Egyszerű gráf, fokszám, élszám, teljes gráf, összefüggő gráf. Euler-körséta és –séta. Irányított gráf, tournament. Páros gráf.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Kiválasztási feladat, aritmetikai műveleti algoritmusok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algoritmusok a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban, játékokban. Algoritmusok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>A témakör nagy részét más anyagrészekben tárgyaljuk.</i></p> <p>Ismerkedés az algoritmusokkal, elsősorban konkrét matematikai játékokon, keresési feladatokon és egyszerű aritmetikai, kombinatorikai módszereken keresztül.</p> <p>Legnagyobb közös osztó kiszámítása prímtényezőkből és euklideszi algoritmussal. Átváltás számrendszerek között.</p> <p>Diszkrét matematikai játékok: „Biztosan nyerünk”, „adott lépésszám mellett biztosan találunk”; „nyerő helyzet”, „vesztő helyzet” fogalmának kialakítása konkrét játékok példáján keresztül. Játékok szimmetriája konkrét, egyszerű példákban.</p> <p>Keresési feladatok: n elemű halmazból minimális és maximális elem kiválasztása minimális kérdéssel. [Lineáris keresés. Bináris keresés.] Mit jelent a „kérdés” a keresési feladatokban.</p>		<p><i>Informatika:</i> Keresési és kiválasztási algoritmusok, algoritmus lépésszámának elemzése.</p>
Kulcsfogalmak/	Algoritmus. Nyerő helyzet, vesztő helyzet, nyerő stratégia.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 8 óra
Előzetes tudás	Egyszerű leszámolások elvégzése, koordináta-rendszer fogalma, szögmérés és egyszerű geometriai szerkesztési feladatok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>A leíró statisztika alapfogalmainak megértése és használata gyakorlati feladatokban. Adatsorok grafikus megjelenítésének megismerése, olvasása és készítése, kész grafikonok elemzése.</p> <p>A leíró statisztika alapfogalmai segítségével a valószínűség alapfogalmainak megismerése, alkalmazása egyszerű problémákban.</p>	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Leíró statisztika alapfogalmai, adathalmazok jellemzése átlag, medián, módusz, terjedelem segítségével. Az egyes fogalmaknak az adathalmaz jellemzése szempontjából betöltött szerepe (mikor melyiket alkalmazzuk).</p> <p>Adathalmazok leírásához használt segédfogalmak, osztályba sorolás, gyakoriság, relatív gyakoriság. Táblázatok készítése, értelmezése.</p> <p>Adathalmazok grafikus megjelenítése, kördiagram, oszlopdiagram készítése, értelmezése. Alternatív grafikus megjelenítési formák. A grafikus ábrázolási módok előnyei és hátrányai. Manipulatív vagy hibás megjelenítési formák elemzése.</p> <p>Klasszikus valószínűségi modell bevezetése. [Eseményalgebra szemléletes bevezetése, a valószínűség egyszerű összefüggéseinek felismerése, megállapítása.]</p> <p>Események függetlenségének szemléletes bevezetése.</p> <p>[Két kocka és három kocka problémája, sorrendiség kérdése.]</p>		<p><i>Fizika:</i> Kísérleti jegyzőkönyvekhez mérési adatok ábrázolása, kiértékelése.</p> <p><i>Biológia, földrajz, történelem:</i> különböző adathalmazok, értékek grafikus megjelenítése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Adathalmaz, kördiagram, oszlopdiagram, osztályba sorolás, gyakoriság, gyakorisági diagram, relatív gyakoriság. Átlag, (súlyozott számtani közép), medián, módusz, terjedelem. Esemény, elemi esemény, klasszikus valószínűségi modell.	

**A fejlesztés várt
eredményei a két
évfolyamos ciklus
végén**

Halmazok

- Halmazok szemléltetése Venn-diagrammon.
- Műveletek halmazokkal.
- Ponthalmazok ismerete.
- Szitaformula a legegyszerűbb esetekben.

Logika

- Állítások összekapcsolásának értelmezése.
- Logikai és, vagy, tagadás fogalma.
- Ekvivalens állítások szerkezetének elemzése.
- Indirekt bizonyítások konkrét példákön.
- Ellenpélda, az összes eset vizsgálata.

Számelmélet

- Oszthatóság; prímszámok és összetett számok ismerete.
- Oszthatósági szabályok használata.
- Oszthatósági tulajdonságok
- Pozitív egész számok prímtényező felbontása és alkalmazása.
- Oszthatósági vizsgálatok végzése.
- Egyszerű számelméleti függvények ismerete.
- Az euklideszi algoritmus alkalmazása.
- Műveletek (osztási) maradékokkal.
- Végtelen sok prímszám van, bizonyítással
- A számelmélet alaptételének megfogalmazása (bizonyítás nélkül)
- Relatív prímelek fogalma
- l.n.k.o. és l.k.k.t. keresése két és több egész szám esetén is
- Összetett számokra vonatkozó oszthatósági szabályok ismerete
- Összeadás és kivonás nem 10-es alapú számrendszerben

Algebra

- Számolás algebrai egész kifejezésekkel.
- Szöveges feladatok megoldása.
- Nevezetes algebrai azonosságok használata.
- Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása.
- Lineáris és arra visszavezethető egyenletek megoldása.
- Lineáris egyenletrendszerek megoldása.

Geometria

- Háromszög nevezetes vonalainak és pontjainak ismerete.
- Thalész-tétel ismerete.
- Síkidomok területének számolása.
- Egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik.
- A háromszög nevezetes köreinek ismerete.
- Körök érintői, közös érintők ismerete.
- Helyvektor, vektor (szemléletesen).

Függvények

- Függvények jellemzése: Értelmezési tartomány, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás, értékkészlet.
- Lineáris függvények, lineáris kapcsolatok, meredekség ismerete.
- Abszolútérték-függvények, másodfokú függvények ismerete.
- Függvény grafikonjának ábrázolása.
- Paritás, korlátosság meghatározása.

Kombinatorika

- Leszámlálások végzése.
- Permutáció, -skatulyaelv ismerete.
- Pascal-háromszög ismerete, halmazok és részhalmazaik megadása, számuk meghatározása.
- Egyszerű kombinatorikai játékok ismerete.
- Színezések alkalmazása.

Gráfok

- Gráf, csúcs, él, teljes gráf, üres gráf, izolált pont fogalmának ismerete.
- Fokszám meghatározása.
- Euler-séta és -körséta fogalma, keresése.
- Irányított gráf, tournament fogalma konkrét feladatokon keresztül.
- Páros gráfok ismerete.
- Komplementer gráf fogalma.
- Összefüggőség, út, kör szemléletes fogalma.

Algoritmusok

- Algoritmusok ismerete.
- Nyerő stratégia fogalma, megadása konkrét játékok kapcsán. Kétszemélyes determinisztikus játékok kipróbálása, megismerése.
- Alapműveletek „papíron”.
- Legnagyobb közös osztó euklideszi algoritmussal.
- Átváltás számrendszerek között.
- Kombinatorikai objektumok felsorolása.

Valószínűség-számítás, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módjának alkalmazása.
- Adatsokaság ábrázolása diagramon, módusz, medián, átlag kiszámítása.
- Gyakoriság, relatív gyakoriság, esély fogalmának ismerete.
- Valószínűségi feladatok megoldása.
- Kockadobás, pénzfeldobás - feladatmegoldás.

9. évfolyam

Heti óraszám: 7 óra

Éves óraszám: 252 óra

Témakörök:

Halmazok	14 óra
Logika	6 óra
Számelmélet	23 óra
Aritmetika és algebra	50 óra
Geometria	84 óra
Függvények, , analízis	22 óra
Kombinatorika	18 óra
Gráfelmélet	12 óra
Algoritmusok	5 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	18 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 14 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Részhalmaz. Számhalmazok, ponthalmazok, n elemű halmaz részhalmazainak a száma.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának mélyítése, alkalmazása problémamegoldásra. Ismerkedés a végtelen halmazokkal, a halmazműveletek tulajdonságaival, a halmazalgebrával. Több szempont alkalmazásával a megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata során az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Korábbi ismeretek felhasználása, a tanult jelölések alkalmazása, felfrissítése.</p> <p>Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz, Descartes-szorzat. Tulajdonságaik: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás De Morgan-azonosságok.</p> <p>Halmazműveletek alkalmazása több halmazra.</p> <p>Halmazok számossága.</p> <p>Véges és végtelen halmazok, megszámlálható, nem megszámlálható halmazok (utóbbi bizonyítás nélkül).</p> <p>A tetszőlegesen nagy és végtelen közti különbségtétel elsajátítása.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor. Russell-paradoxon.</p> <p>Vegyes feladatok ponthalmazok és halmazműveletek alkalmazására. Ponthalmazok a koordinátásíkon.</p>		<p><i>Informatika:</i> adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, ekvivalencia	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	Állítások megfogalmazása a hétköznapi életből. Matematikai állítások vizsgálata. Igaz és hamis állítások. Állítás tagadása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A köznapi életben használt logikai következtetések és a matematikai logikában használt kifejezések összevetése. Matematikai állítások helyes megfogalmazása, érvelés, bizonyítási készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Az állítás fogalmának pontosabb elemzése, állítás és megfordítása. Az állítás fogalmának kialakítása változatos példákon, a fogalom pontos kialakítása (pl. nem személyfüggő, a „mondat” és az „állítás” különbsége). Egyszerűbb matematikai állítások logikai elemzése. A logikai műveletek különböző alkalmazásai.</p> <p>Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia.</p> <p>Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik: igazságtáblázataik; a műveleti azonosságok.</p> <p>A kétváltozós logikai műveletek azonosságainak igazolása (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, De Morgan-azonosságok stb.).</p> <p>Direkt, indirekt bizonyítás.</p> <p>A „minden” és a „van olyan” kvantorok használata rövidítésként.</p> <p>Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel.</p> <p>A halmazműveletek és a logikai műveletek összefüggése.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Kurt Gödel.</p>		<p><i>Filozófia:</i> tézis, antitézis, szintézis.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> retorikai alapismeretek.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Logikai művelet.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 23 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Prímek, euklideszi algoritmus, kongruenciák és maradékosztályok, a kapcsolódó tételek megismerése.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A Σ és Π jelek használata.</p> <p>Oszthatósági feladatok megoldása teljes indukcióval és nevezetes azonosságok alkalmazásával.</p> <p>Oszthatósági szabályok nem 10-es alapú számrendszerben az alapszámmal és szomszédaival (Bizonyítással). Szorzás és osztás nem 10-es alapú számrendszerben.</p> <p>A legnagyobb közös osztó előállítható euklideszi algoritmussal a két szám lineáris kombinációjaként.</p> <p>Lineáris kétismeretlenes diofantikus egyenlet megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele. Megoldási módszerek: grafikus, algoritmusos</p> <p>Számelméleti függvények: Osztók száma, Euler féle φ függvény, osztók összege, különböző prímosztók száma, összes prímosztók száma, additív és multiplikatív tulajdonságok. [Bizonyítással, kapcsolat az algoritmusokkal, számolási program írása a függvények kiszámolására] A tökéletes számok. Barátságos számpárok. A pitagoraszi számhármasok előállítása [számítógéppel is]</p> <p>[Módszerek nem diofantikus egyenletek és más számelméleti feladatok megoldására. A különböző módszerek tárgyalhatók konkrét feladatmegoldásokban.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat, Mersenne.</p>		<p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> babiloni, egyiptomi, görög antik tudományos központok.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Prím. Diofantoszi egyenlet. Pitagoraszi számhármas. Számelméleti függvény. Euler féle φ függvény. Tökéletes számok.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Aritmetika és algebra	Órakeret 50 óra
Előzetes tudás	Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Másodfokú, továbbá gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Az egész számok gyűrűje; a racionális és a valós számtest; konkrét csoportok megismerése. A rendszerező képesség fejlesztése. Polinomok vizsgálata Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek megismerése, alkalmazása	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Egyenlet megoldási módszerek: mérlegelv, grafikus megoldása, ekvivalens átalakítások, következmény egyenlet, új ismeretlen bevezetése, értelemzési tartomány és értékészlet vizsgálat.		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika.

<p>Alaphalmaz és megoldáshalmaz. Ekvivalens és nem ekvivalens lépések az egyenletmegoldás során, ellenőrzés, hamis gyökök, gyökvesztés. Paraméteres és abszolútértékes egyenletek algebrai megoldása.</p> <p>n változós lineáris egyenletrendszer megoldása, Gauss-féle elimináció.</p> <p>A másodfokú egyenlet megoldóképlete; gyökök és együtthatók közti összefüggés (Viète-formulák); gyöktényezős alak. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek megoldása. Paraméteres és szöveges feladatok, reciprok-egyenlet. Szélsőérték-feladatok.</p> <p>Az n-edik gyök fogalma. Számolás gyökös kifejezésekkel; irracionális számok konstrukciója különböző módszerekkel.</p> <p>A számtani és mértani, a harmonikus és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség két számra bizonyítással, és általános esetben bizonyítás nélkül</p>	<p><i>Kémia:</i> oldatok összetétele.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns, diszkusszió. Egyenletrendszer. n-edik gyök. Gyökös egyenlet. Algebrai struktúra fogalma, csoport, gyűrű, test.</p>

<p>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</p>	<p>Geometria</p>		<p>Órakeret 84 óra</p>
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Tételek, távolság, szög, illeszkedés. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Szerkesztések. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Transzformációk ismerete.</p>		
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. Transzformációk áttekintése. Szögfüggvények megismerése. Számítógép használata dinamikus szerkesztőprogramokkal.</p>		
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>			<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>A háromszög nevezetes pontjai, vonalai (ismétlés és bizonyítás). Háromszög-egyenlőtlenség. A háromszögek szögeiről, oldalairól tanult tételek bizonyítása, alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban. A háromszög középvonala tulajdonságainak bizonyítása.</p> <p>Euler-egyenes és Feuerbach-kör.</p> <p>Háromszög izogonális pontja.</p> <p>Ívmérték, körív hossza, körcikk területe.</p> <p>Kerületi és középponti szögek tétele. Látókörv. Húrnégyszögek tételei.</p>			<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztő program használata.</p>

<p>Érintőnéyszögek.</p> <p>Az egybevágósági transzformációk folytatása. Térbeli egybevágósági transzformációk. Tengelyes tükrözések összetétele; irányított szakaszok és szögek. Az egybevágósági transzformáció mint távolságtartó transzformáció. Forgatás és eltolás mint két tengelyes tükrözés összetétele. Geometriai szélsőérték-feladatok.</p> <p>Az egybevágósági transzformációk szorzata; a sík egybevágóságainak osztályozása; összefoglalása. A sík minden egybevágósági transzformációja előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés összetételként három tengelyes tükrözés összetétele csúsztatva tükrözés. [Az egybevágósági transzformációk csoportja.]</p> <p>A középpontos hasonlóság általános definíciója; hasonlósági transzformáció. Párhuzamos szelők tétele (bizonyítás racionális arányra); a középpontos hasonlóság tulajdonságai. Háromszögek hasonlóságának alapesetei. A trapéz tulajdonságai. Szögfelező-tétel a háromszögben; magasságtétel, befogótétel derékszögű háromszögben. Mértani közép szerkesztése. Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele.</p> <p>Hasonló sokszögek területének, hasonló testek térfogatának és felszínének aránya. Alakzatok egybevágósága és hasonlósága.</p> <p>Trigonometriai alapismeretek. Hegyesszögek szögfüggvényei. Ezek kapcsolata, számítási feladatok síkban, térben. Térelemek szöge.</p> <p>Az ismert területképletek bizonyítása a terület általános fogalma alapján. Trigonometrikus területképletek.</p> <p>Helyvektorok alkalmazása. Vektorkoordináták. Szakasz hossza, osztópontjainak koordinátái. Háromszög súlypontjának koordinátái.</p> <p>Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága és szöge, számolások. Tetraéder súlypontjának tulajdonságai.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Euler.Feuerbach</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Transzformáció, ívmérték, kerületi- és középponti szög, hasonlóság, szögfüggvény, térelemek távolsága, szöge.</p>

<p>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</p>	<p>Függvények, analízis</p>	<p>Órakeret 22 óra</p>
<p>Előzetes tudás</p>	<p>A másodfokú, reciprok és gyökfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk kezelése, sorozat határértékének fogalma és alkalmazása feladatok megoldásában, mértani sorozat ismerete, koordinátageometriai alapismeretek, konvexitás geometriai feladatokban és a fent említett függvények esetén.</p>	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A függvényvizsgálat fejlesztése. A végtelen sorozatokkal kapcsolatos szemléletmód kialakítása, az ilyen gondolkodásmód fejlesztése. Egyváltozós függvények elemzése. A valós számok fogalmának kiépítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Függvények vizsgálata elemi módszerekkel, alkalmazások. A konvexitás; a függvénygörbe „alatti” és „fölötti” tartomány.</p> <p>Függvénytranszformációk rendszerezése.</p> <p>Számtani és mértani sorozatok.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Cantor és Dedekind.</p>		<p><i>Informatika:</i> függvények ábrázolása számítógéppel (Geogebra v. Derive v. Maple).</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Monotonitás, korlátosság, paritás. Periodicitás, monoton szakaszok, értékkészlet.	
A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<p>A helyes érvelésre szoktatással a tanulók rendelkezzenek megfelelő kommunikációs készséggel. Legyen elég tapasztalatuk a valós számok és a végtelen sorozatok egyszerűbb tulajdonságairól.</p> <p>Rendelkezzenek alapvető matematikai kultúrtörténeti ismeretekkel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire.</p>	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	Kombinatorikai alapeladatok. Permutáció, leszámolások.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>A kombinatorikai gondolkodásmód kialakítása, alkalmazása a matematika különböző ágaiban.</p> <p>A diszkréttség kihasználásának módjai (teljes indukció, van legnagyobb, legkisebb, legszélső elem; „véges sok lépésben véget ér”).</p> <p>A szitaformula megértése.</p>	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A kombinatorikai alapeladatok rendszerezése. (Ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, kombináció, variáció)</p> <p>Binomiális- tétel bizonyítása. A Pascal-háromszög tulajdonságai.</p> <p>Teljes indukció a kombinatorikában.</p> <p>Állapotfüggvényes és invariancával megoldható kombinatorikus feladatok. Létezés bizonyítása az átlag segítségével.</p> <p>A szitaformula és alkalmazása.</p> <p>Kombinatorikus megfontolások számelméleti és algebrai feladatokban.</p> <p>Kombinatorikus geometriai feladatok.</p>		<p><i>Informatika:</i> Permutációk felsorolása. Kombinatorikus gondolatok alkalmazása a számítógépes grafikában.</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Pascal-háromszög. Binomiális tétel. Ismétléses kombináció, variáció. Szitaformula. Kombinatorikus geometria.
------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 12 óra
Előzetes tudás	Gráf fogalma, csúcs, élszám és fokszám, összefüggésük.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az absztrakt gráfelméleti alapfogalmak (fa, összefüggőség, kromatikus szám) és tételek elsajátítása, alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Gráfok izomorfiája. Reguláris gráfok. Körmérközések párosításai.</p> <p>Az összefüggőség pontos definíciója; az „úttal összekötve lenni” tranzitív. Összefüggő komponensekre bontás. Gráf vagy komplementere összefüggő. Az összefüggőség alkalmazása.</p> <p>A fa fogalma. A fa definícióinak ekvivalenciája, élszámára, szerkezetére, mini-max-tulajdonságára vonatkozó tételek.</p>		<p><i>Informatika:</i> Fák „ábrázolása”, hídélek. Úttervezés, közlekedéstervezés. Körmérközés-tervezés.</p> <p><i>Kémia:</i> molekulaszervezetek gráfja. Szénhidrátok jellemzése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Reguláris gráf. Gráfok izomorfiája. Út, kör, összefüggőség, komponens, fa, erdő. Fa mint minimális összefüggő és maximális körmentes gráf. Feszítő fa.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 5 óra
Előzetes tudás	Konkrét kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája; kiválasztási és keresési algoritmusok, egyszerű kombinatorikai algoritmusok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az állapotfüggvény használata algoritmusok elemzéséhez. Mohó algoritmusok megismerése, a helyesség bizonyítása. Klasszikus és lineáris algebrai algoritmusok megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>A témakör nagy részét más anyagrészekben tárgyaljuk. Bizonyítás és algoritmus kapcsolata.</i></p> <p>Állapotfüggvény használata az algoritmus befejeződésének és helyességének bizonyításához. Invariáns és monovariáns.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Állapotfüggvény. Invariáns és monovariáns tulajdonság. Lépésszám.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	Leíró statisztika alapfogalmai, középértékek. Adathalmazok grafikus ábrázolása. Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Szóródási mérőszámok, kapcsolatuk a középértékekkel. A leíró statisztikában rejlő manipulációs lehetőségek kiszűrése, a lehetséges hibaforrások megismerése. A két- és a többdimenziós adatkiértékelés által létrehozott kimutatók közti különbség felismerése. Eseményalgebra. A valószínűség szemléletes fogalmának kiterjesztése. A valószínűség tulajdonságainak általános megfogalmazása. Valószínűségi változó, nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai valószínűségi modell bevezetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Szóródási mérőszámok: átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés mint „jósaági” kritérium, a középértékekkel való kapcsolatuk. [Melyik szóródási mérőszám melyik középértékre minimális.] Szórás.</p> <p>A leíró statisztikában rejlő manipulációs lehetőségek kiszűrése, a lehetséges hibaforrások megismerése. Hibás vagy manipulatív kimutatók készítése, elemzése.</p> <p>Eseményalgebra. Események összege, szorzata. A valószínűség szemléletes fogalmának kiterjesztése. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel.</p> <p>Geometriai valószínűségi modell bevezetése egyszerű feladatokon keresztül.</p>		<i>Fizika:</i> Adatsorok közti lineáris kapcsolat felismerése, legkisebb négyzetek módszere.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés, szórás. Események összege, szorzata, komplementere. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel.	

10. évfolyam

Heti óraszám: 7 óra

Éves óraszám: 252 óra

Témakörök:

Halmazok	4 óra
Logika	4 óra
Számelmélet	26 óra
Aritmetika és algebra	55 óra
Geometria	74 óra
Függvények, analízis	36 óra
Kombinatorika	10 óra
Gráfelmélet	17 óra
Algoritmusok	5 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	21 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 4 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Részhalmaz. Számhalmazok, ponthalmazok, n elemű halmaz részhalmazainak a száma.	
A tematikai egység nevelési- fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának mélyítése, alkalmazása problémamegoldásra. Ismerkedés a végtelen halmazokkal, a halmazműveletek tulajdonságaival, a halmazalgebrával. Több szempont alkalmazásával a megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata során az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz, Descartes-szorzat. Tulajdonságaik: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás De Morgan-azonosságok. (ismétlés)</p> <p>Halmazok számossága. Véges és végtelen halmazok, megszámlálható, nem megszámlálható halmazok (utóbbi bizonyítás nélkül).</p> <p>A megszámlálhatóan végtelen. Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor. Russell-paradoxon.</p> <p>Halmazok ekvivalenciája. A természetes számokkal, ill. a valós számokkal ekvivalens halmazok.</p>		<p><i>Informatika:</i> adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint.</p>

Síkbeli alakzatok ekvivalenciája, térbeli alakzatok ekvivalenciája.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, ekvivalencia

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 4 óra
Előzetes tudás	Állítások megfogalmazása a hétköznapi életből. Matematikai állítások vizsgálata. Igaz és hamis állítások. Állítás tagadása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A köznapi életben használt logikai következtetések és a matematikai logikában használt kifejezések összevetése. Matematikai állítások helyes megfogalmazása, érvelés, bizonyítási készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia.</p> <p>Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik: igazságtáblázataik; a műveleti azonosságok. (ismétlés)</p> <p>A kétváltozós logikai műveletek azonosságainak igazolása (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, De Morgan-azonosságok stb.).</p> <p>Direkt, indirekt bizonyítás.</p> <p>A „minden” és a „van olyan” kvantorok használata rövidítésként.</p> <p>Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel.</p> <p>Relációk, ekvivalencia relációk, rendezési relációk.</p> <p>A halmazműveletek és a logikai műveletek összefüggése. [A számítógépek és a logika kapcsolata. Logikai áramkörök; például összeadó egység tervezése (kettes számrendszerben) „és” kapukból, „vagy” kapukból és invertekből. Áramkörök egyszerűsítése az ismert azonosságok felhasználásával.]</p> <p>Boole-algebra.</p> <p><i>Matematikatörténet: Kurt Gödel.</i></p>		<p><i>Filozófia:</i> tézis, antitézis, szintézis.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> retorikai alapismeretek.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Logikai művelet, Boole-algebra.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 26 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Prímek, euklideszi algoritmus, kongruenciák és maradékosztályok, a kapcsolódó tételek megismerése.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>[Prímek eloszlása, prímeikkel kapcsolatos tételek. [Csebisev, Dirichlet] Mersenne- és Fermat-prímek. Sejtések]</p> <p>Lineáris kétismeretlenes diofantikus egyenlet. Megoldási módszerek: grafikus, algoritmusos, [lánctörtes] kongruenciás.</p> <p>A kongruencia alaptulajdonságai (a kongruenciával való „számolási szabályok”), maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszer Wilson-tétel, (Bizonyítással). Lineáris egyismeretlenes kongruenciák megoldási algoritmus. Számolás maradékosztályokkal, Euler-Fermat-tétel. (bizonyítással) [Lineáris kongruencia rendszerek megoldása, Kínai maradéktétel.]</p> <p>[A $4k + 1$ alakú prímeekre az $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldható, a $4k - 1$ alakúakra nem.]</p> <p>[A maradékosztályok gyűrűje. Konkrét modulusok esetén annak eldöntése, hogy melyik maradékosztálynak van multiplikatív inverze; hogy egy adott maradékosztály gyűrű, test-e. Nem prímmodulus esetén van nullosztó.]</p> <p>Számelméleti függvények:</p> <p>[Módszerek nem diofantikus egyenletek és más számelméleti feladatok megoldására. A különböző módszerek tárgyalhatók konkrét feladatmegoldásokban.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat, Mersenne.</p>		<p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> babiloni, egyiptomi, görög antik tudományos központok.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Prím, kongruencia, maradékosztály. Diofantoszi egyenlet. Számelméleti függvény. Euler féle φ függvény. Tökéletes számok.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Aritmetika és algebra	Órakeret 55 óra
Előzetes tudás	Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>Másodfokú, továbbá gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Az egész számok gyűrűje; a racionális és a valós számtest; konkrét csoportok megismerése. A rendszerező képesség fejlesztése.</p> <p>Polinomok vizsgálata</p> <p>Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek megismerése, alkalmazása</p>	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Egyenlet megoldási módszerek: új ismeretlen bevezetése, értelmezési tartomány és értékészlet vizsgálat. Ekvivalens és nem ekvivalens lépések az egyenletmegoldás során, ellenőrzés, hamis gyökök,		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika.

<p>gyökvesztés. Paraméteres és abszolútértékes egyenletek algebrai megoldása.</p> <p>n változós lineáris egyenletrendszer megoldása, Gauss-féle elimináció.</p> <p>A másodfokú egyenlet, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek megoldása. Paraméteres és szöveges feladatok, reciprok-egyenlet. Szélsőérték-feladatok.</p> <p>Az n-edik gyök fogalma. Számolás gyökös kifejezésekkel; irracionális számok konstrukciója különböző módszerekkel. Törtkitevőjű hatványok.</p> <p>A logaritmus fogalma, azonosságai. Exponenciális és logaritmusos egyenletek egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása.</p> <p>Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása egyszerűbb esetekben.</p> <p>Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség. Rendezési egyenlőtlenség.</p> <p>Egész együtthatós polinomok; egész és racionális gyökeik. Fokszám; műveletek polinomokkal; együttható, főegyüttható, polinomok maradékos osztása, gyöktényezők, többszörös gyökök; gyökök és együtthatók közti összefüggés. A Horner elrendezés.</p> <p>Algebrai struktúra fogalma</p> <p>Csoportok, gyűrűk és testek konkrét példákon. Az egész számok gyűrűje, a racionális és a valós számok teste.</p>	<p><i>Kémia:</i> oldatok összetétele.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns, diszkusszió. Egyenletrendszer. n-edik gyök. Gyökös egyenlet. Logaritmus. Exponenciális és logaritmusos egyenlet, egyenlőtlenség. Trigonometrikus egyenlet, egyenlőtlenség.</p> <p>Polinom.</p> <p>Algebrai struktúra fogalma, csoport, gyűrű, test.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 74 óra
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Tételek, távolság, szög, illeszkedés. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Szerkesztések. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Transzformációk ismerete.</p>	
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. Transzformációk áttekintése. Szögfüggvények megismerése. Számítógép használata dinamikus szerkesztőprogramokkal.</p>	
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>		<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>Euler-egyenes és Feuerbach-kör. Háromszög izogonális pontja. (ismétlés)</p>		<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztő</p>

<p>Kerületi és középponti szögek tétele. Látókörív. Húrnégyszögek tételei. (ismétlés)</p> <p>Geometriai szélsőérték-feladatok.</p> <p>Héron-képlet.</p> <p>Az egybevágósági transzformációk szorzata; a sík [és a tér] egybevágóságainak osztályozása; összefoglalása [Az egybevágósági transzformációk csoportja. Alakzatok transzformációcsoportja.] [Szabályos háromszög, négyzet, téglalap, szabályos tetraéder transzformációcsoportja; a sík egybevágósági transzformációinak csoportja.]</p> <p>Szögfelező-tétel a háromszögben; magasságtétel, befogótétel derékszögű háromszögben. Mértani közép szerkesztése. Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele. (ismétlés)</p> <p>Aranymetszés. Menelaosz és Ceva tétele. Apolloniusz-kör.</p> <p>[Pont körre, gömbre vonatkozó hatványa, hatványvonal.]</p> <p>A forgatva nyújtás. A forgatva nyújtás tulajdonságai. [Ptolemaiosz tétele húrnégyszögekre és általában.]</p> <p>Merőleges affinitás alaptulajdonságai.</p> <p>Inverzió [sztereografikus projekció] alaptulajdonságai.</p> <p>Trigonometriai alapismeretek. Hegyesszögek szögfüggvényei. (ismétlés)</p> <p>A szögfüggvények vektorokkal. A szögfüggvények addíciós tételei. Az ismert területképletek bizonyítása a terület általános fogalma alapján. Trigonometrikus területképletek. Szinusztétel. Koszinusztétel. A trigonometria biztos ismerete. [Gömbi és síkgeometria összehasonlítása.]</p> <p>Helyvektorok alkalmazása. Vektorkoordináták. Szakasz hossza, osztópontjainak koordinátái. Háromszög súlypontjának koordinátái. (ismétlés)</p> <p>Skalárszorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat és alaptulajdonságai, kiszámolása a koordináta-rendszerben, alkalmazása feladatokban, bizonyításokban.</p> <p>A merőlegesség kifejezése skalárszorzattal. Vektorok szögének kiszámítása. Párhuzamos és merőleges összetevők kiszámítása.</p> <p>Tételek kölcsönös helyzete, távolsága és szöge, számolások. Tetraéder súlypontjának tulajdonságai.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i></p> <p>Euler. Ptolemaiosz</p>	<p>program használata.</p> <p><i>Fizika:</i> A skalárszorzat használata a definíciókban (munka, stb.).</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Transzformáció, ívmérték, kerületi- és középponti szög, skalárszorzat, vektoriális szorzat, hasonlóság, inverzió, szögfüggvény, tételek távolsága, szöge.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények, analízis	Órakeret 36 óra
Előzetes tudás	A másodfokú, reciprok és gyökfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk kezelése, sorozat határértékének fogalma és alkalmazása feladatok megoldásában, mértani sorozat ismerete, koordinátageometriai alapismeretek, konvexitás geometriai feladatokban és a fent említett függvények esetén.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A függvényvizsgálat fejlesztése. A végtelen sorozatokkal kapcsolatos szemléletmód kialakítása, az ilyen gondolkodásmód fejlesztése. Egyváltozós függvények elemzése. A valós számok fogalmának kiépítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Ponthalmazok korlátosságának fogalma. Sorozatok korlátosságának fogalma. [Sűrű halmazok. Sehol sem sűrű halmazok.]</p> <p>A periodikus tizedes törtek és a végtelen mértani sorok. Felezési eljárással megoldható feladatok; [példák korlátos és nem korlátos mértani sorokra; a „hópehelygörbe” területe véges, kerülete nem korlátos. Példák fraktálokra; a Cantor-halmaz és tulajdonságai]</p> <p>Függvények vizsgálata elemi módszerekkel, alkalmazások. A konvexitás; a függvénygörbe „alatti” és „fölötti” tartomány. Gyenge (felezőpontbeli) konvexitás. Az injektív, szürjektív és bijektív függvény fogalma. Injektív függvény inverzének fogalma.</p> <p>A trigonometrikus függvények és inverzeik tulajdonságai; gyenge konvexitásuk, konvexitásuk. Periodikus függvények.</p> <p>[Szemléletes analízis: függvények konvexitásának jellemzése a különbségi hányados segítségével. Elemi függvények gyenge konvexitása. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség mint az exponenciális függvény konvexitásának következménye; hatványközepek és az x^a, $a \in \mathbf{R}$ függvény konvexitása.]</p> <p>A valós számok tulajdonságai. Rekurzív sorozatok, Fibonacci sorozat, [másodrendű lineáris rekurziók megoldása] Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság szempontjából. [Minden sorozatnak van monoton részsorozata. Nullsorozatok: a konvergencia fogalmának előkészítése.] A harmonikus sor. A $\sum \frac{1}{n}$ nem korlátos, a $\sum \frac{1}{n^2}$ korlátos.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Cantor és Dedekind.</p>		<p><i>Biológia-egészségtan:</i> populációdinamikai modellek.</p> <p><i>Informatika:</i> függvények ábrázolása számítógéppel (Geogebra v. Derive v. Maple).</p>

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Monotonitás, korlátosság, paritás. Periodicitás, monoton szakaszok, értékészlet, konvexitás-konkávitás. Arkhimédészi-axióma és Cantor-axióma, Dedekind-szelet. Monoton sorozat; korlátos sorozat. Végtelen mértani sor.	
A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	A helyes érvelésre szoktatással a tanulók rendelkezzenek megfelelő kommunikációs készséggel. Legyen elég tapasztalatuk a valós számok és a végtelen sorozatok egyszerűbb tulajdonságairól. Rendezzenek alapvető matematikai kultúrtörténeti ismeretekkel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire.	
Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Kombinatorikai alapfeladatok. Permutáció, leszámolások.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A kombinatorikai gondolkodásmód kialakítása, alkalmazása a matematika különböző ágaiban. A diszkrétség kihasználásának módjai (teljes indukció, van legnagyobb, legkisebb, legszélső elem; „véges sok lépésben véget ér”). A szitaformula megértése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Binomiális- [és polinomiális-] tétel bizonyítása. A Pascal-háromszög tulajdonságai. Teljes indukció a kombinatorikában. Bonyolultabb skatulyaelves feladatok. Rekurzió és kombinatorika. A kétszeres leszámolás módszere, kétszeres leszámolással igazolható azonosságok. Állapotfüggvényes és invarianciával megoldható kombinatorikus feladatok. A szitaformula és alkalmazása. Kombinatorikus megfontolások számelméleti és algebrai feladatokban. Kombinatorikus interpretációval igazolható azonosságok. Kombinatorikus geometriai feladatok.		<i>Informatika:</i> Permutációk felsorolása. Kombinatorikus gondolatok alkalmazása a számítógépes grafikában.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Pascal-háromszög. Binomiális és polinomiális tétel. Ismétléses kombináció, variáció. Szitaformula. Kombinatorikus geometria.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 17 óra
Előzetes tudás	Gráf fogalma, csúcs, élszám és fokszám, összefüggésük.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az absztrakt gráfelméleti alapfogalmak (fa, összefüggőség, kromatikus szám) és tételek elsajátítása, alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Reguláris gráfok. Gráf vagy komplementere összefüggő. Gráfokkal kapcsolatos egyszerű algoritmusok. (L. az algoritmusoknál is.) Adott gráfban adott pontpár közti legrövidebb út megkeresése algoritmussal. Szélességi keresés. Gráf átmérője. Egy gráf páros, ha nincs benne páratlan kör.</p> <p>A fa definícióinak ekvivalenciája, élszáma, szerkezetére, mini-max-tulajdonságára vonatkozó tételek. Feszítő fák, szélességi és mélységi feszítő fa.</p> <p>Kromatikus szám. Kromatikus szám \geq maximális klikk (teljes részgráf), példák szigorú egyenlőtlenségre. 2-kromatikus gráf páros. Maximális fokszám $+1 \geq$ kromatikus szám (mohó algoritmus). Extremális gráfelmélet: egyszerűbb Ramsey-típusú tételek; Turán-tétel háromszögekre. Erdős–Szekeres-tétel.</p> <p>Írányított gráf. Írányított Euler-körséta. Fenyők.</p>		<p><i>Informatika:</i> Fák „ábrázolása”, hídélek. Úttervezés, közlekedéstervezés. Körmérváz-tervezés.</p> <p><i>Kémia:</i> molekulaszervezetek gráfja. Szénhidrátok jellemzése.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Reguláris gráf. Fa mint minimális összefüggő és maximális körmentes gráf. Feszítő fa. Páros gráf. Kromatikus szám.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 5 óra
Előzetes tudás	Konkrét kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája; kiválasztási és keresési algoritmusok, egyszerű kombinatorikai algoritmusok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az állapotfüggvény használata algoritmusok elemzéséhez. Mohó algoritmusok megismerése, a helyesség bizonyítása. Klasszikus és lineáris algebrai algoritmusok megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>A témakör egy részét más anyagrészekben tárgyaljuk.</i></p> <p>A mohó algoritmus korlátainak és erejének megértése.</p> <p>Algebrai algoritmusok: polinomok kiértékelése a Horner-séma segítségével, polinomok maradékos osztása. Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval. Egyszerű adatstruktúrák. Lépésszám fogalma. Polinomiális algoritmus.</p> <p>Minimum keresés, bináris keresés; lépésszám. Rendező algoritmusok (beszúrásos rendezés, buborékrendezés, összefésülés, stb.)</p>		<p><i>Informatika:</i> adatstruktúrák, rendezési algoritmusok, mohó algoritmusok, befejeződés, hatékony algoritmusok. Gráfbejárások.</p>

Gráf-algoritmusok. Gráfok tárolási módjai: adjacencia (szomszédsági) mátrix, éllisták. [Gráfbejárások: szélességi és mélységi bejárás.]	
---	--

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Mohó algoritmus. Állapotfüggvény. Invariáns és monovariáns tulajdonság. Adatstruktúrák. Lépésszám. <u>Gráfbejárások</u> .
------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 21 óra
--	---	----------------------------

Előzetes tudás	Leíró statisztika alapfogalmai, középértékek. Adathalmazok grafikus ábrázolása. Klasszikus valószínűségi modell.
-----------------------	--

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Szóródási mérőszámok, kapcsolatuk a középértékekkel. A leíró statisztikában rejlő manipulációs lehetőségek kiszűrése, a lehetséges hibaforrások megismerése. A két- és a többdimenziós adatkiértékelés által létrehozott kimutatók közti különbség felismerése. Eseményalgebra. A valószínűség szemléletes fogalmának kiterjesztése. A valószínűség tulajdonságainak általános megfogalmazása. Valószínűségi változó, nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai valószínűségi modell bevezetése.
---	---

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
--	----------------------------

<p>Szórás. A szóródási mérőszámoknak az adathalmazok jellemzésében betöltött szerepe.</p> <p>A leíró statisztikában rejlő manipulációs lehetőségek kiszűrése, a lehetséges hibaforrások megismerése. Hibás vagy manipulatív kimutatók készítése, elemzése. [A két- és a többdimenziós adatkiértékelés által létrehozott kimutatók közti különbség felismerése. Kétdimenziós adatfeldolgozás konvertálása többdimenzióssá konkrét adathalmazok esetén, keresztáblázatok készítése.]</p> <p>Eseményalgebra. Események összege, szorzata. A valószínűség tulajdonságainak általános megfogalmazása. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége.</p> <p>Feltételes valószínűség, függetlenség.</p> <p>A teljes valószínűség tételének és a Bayes-tételnek előkészítése feladatok megoldásán keresztül.</p> <p>Valószínűségi változó szemléletes fogalma. Nevezetes diszkrét eloszlások.</p> <p>Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel.</p> <p>Valószínűségi változó várható értéke szemléletesen.</p> <p>Szimmetria-megfontolások és kombinatorikus módszerek alkalmazása a valószínűség kiszámítására.</p>	<p><i>Fizika:</i> Adatsorok közti lineáris kapcsolat felismerése, legkisebb négyzetek módszere.</p>
---	---

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés, szórás. Események összege, szorzata, komplementere, feltételes valószínűség, függetlenség. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel.
------------------------------------	--

**A fejlesztés várt
eredményei a
két évfolyamos
ciklus végén**

Halmazok

- A halmazműveletek és tulajdonságaik ismerete.
- Halmazok számossága fogalmának helyes értelmezése.
- Annak bizonyítása, hogy a racionális számok megszámlálható, a valós számokkal ekvivalens halmazok.
- Végtelen halmazok ekvivalenciájának ismerete.
- A részhalmazok, ponthalmazok, logikai szita fogalmainak biztosabb tudása

Logika

- Az állítás fogalmának ismerete.
- Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete.
- A „minden” és „van olyan” kvantorok használata.
- A halmazműveletek és a logikai műveletek összefüggésének ismerete.

Számelmélet

- Oszthatósági szabályok nem 10-es alapú számrendszerekben
- Számelméleti függvények értékének kiszámolása: osztók száma, osztók összege, Euler féle φ függvény, prímosztók.
- Lineáris kétismeretlenes diofantoszi egyenletek megoldása: algoritmussal, kongruenciákkal.
- Számolás maradékosztályokkal, lineáris kongruenciák megoldása.
- Euler-Fermat tétel alkalmazása.

Aritmetika és algebra

- Másodfokú és erre visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása, diszkrimináns vizsgálata, gyökök és együtthatók közötti kapcsolat, gyöktényezős alak.
- A másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése
- A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés bizonyítása
- Másodfokúra vezető egyenletek megoldása
- Másodfokúra vezető egyenletrendszerek megoldása
- Másodfokú paraméteres egyenlet megoldása
- n változós lineáris egyenletrendszer megoldása
- Egyenlőtlenség rendszerek megoldása (lineáris, másodfokú, törtes)
- Hatványozás fogalma és azonosságainak bizonyítása tetszőleges kitevő esetén
- Egyenletek megoldása értelmezési tartomány illetve értékészlet vizsgálattal
- Egyenletek megoldása szorzattá alakítással
- Gyökvonás fogalma és azonosságainak bizonyítása tetszőleges gyökkitevő esetén
- Gyökös egyenletek megoldása (két négyzetre emeléssel is!)
- A logaritmus fogalma, azonosságainak bizonyítása

- Permanencia elv
- Irracionális kitevőjű hatvány szemléletes értelmezése
- Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása
- Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, megoldása (addíciós tételek nélkül)
- Polinom fogalma, műveletek, oszthatóság
- Egész együtthatós polinomok egész és racionális gyökeinek meghatározása
- Nevezetes közepek közötti összefüggések két számra bizonyítással, több számra csak az összefüggés
- Szélsőérték feladatok megoldása nevezetes közepekkel

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták ismerete, skaláris és vektoriális szorzás.
- Forgásszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- Az egybevágósági transzformációk, azok szorzatának biztos ismerete.
- Hasonlóság ismerete. A szögfelező-, magasság- és befogó tételek bizonyítása. A Menelaosz- és Ceva-tétel ismerete. Az Apollonius-kör ismerete.
- A háromszög geometriájáról tanultak bővítése, további nevezetes pontok, Euler-vonal, Feuerbach-kör ismerete.
- Jártasság a térbeli számításokban.

Függvények

- A függvényekkel kapcsolatos fogalmak bővítése.
- A trigonometrikus függvények ismerete.
- Képesség elemi függvények elemi vizsgálatára.
- A végtelen sorozat fogalmának, tulajdonságainak megértése, változatos példák ismerete sorozatokra.
- A valós számok szemléletes fogalmának kialakulása.

Kombinatorika

- A kombinatorikai alapfeladatok biztos ismerete.
- Binomiális és polinomiális tétel ismerete és használata.
- A szitaformula alkalmazása.
- Kombinatorikus megfontolások alkalmazása számelméleti, algebrai és geometriai feladatokban.
- A kétszeres leszámolás módszerének alkalmazása.
- A rekurzió fogalmának biztos ismerete és alkalmazása.

Gráfelmélet

- A fák fogalmának pontos ismerete és értése, alkalmazása az algoritmusoknál és a valószínűségi feladatoknál is.
- Az összefüggőség, az összefüggő komponens fogalmának értése, alkalmazása.
- A feszítő fák ismerete, alkalmazása.
- Az izomorfia fogalmának világos ismerete.
- A kromatikus szám fogalmának ismerete.
- Az extrémális gráfelmélet egyszerű Ramsey- és Turán-típusú tételek ismerete.

Algoritmusok

- A mohó algoritmus fogalmának, erejének és korlátainak értése.
- Az állapotfüggvény (monovariáns és invariáns) használata az algoritmusok helyességének és befejeződésének igazolásához.
- Algebrai algoritmusok biztos kezelése, polinomok kiértékelése, polinomosztás, Gauss-elimináció.
- Rendezési algoritmusok használata.

Valószínűség-számítás, statisztika

- Szóródási mérőszámok megértése, használata.
- A leíró statisztika hibáinak, manipulációs lehetőségeivel tisztában lenni.
- A valószínűségi változó szemléletes fogalma.
- A visszatevés és visszatevés nélküli mintavételek közötti különbség megértése.

11. évfolyam

Heti óraszám: 7 óra

Éves óraszám: 252 óra

Témakörök:

Halmazok	6 óra
Logika	4 óra
Számelmélet	18 óra
Aritmetika és algebra	30 óra
Lineáris algebra	30 óra
Geometria és analitikus geometria	50 óra
Függvények, analízis, a topológia elemei	60 óra
Gráfelmélet és kombinatorika	20 óra
Algoritmusok	10 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	24 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei. Számhalmazok és ponthalmazok. Példák számhalmazokra és ponthalmazokra. Halmazok ekvivalenciája. Megszámlálható halmazok. A „tetszőlegesen sok” és a „végtelen sok” közti különbség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Halmazelméleti szemléletmód fejlesztése. A fontosabb, mélyebb fogalmak ismerete, a matematika fejlődése szempontjából meghatározó ismeretek átadása; olyan példák, eljárások megismerése, amelyekkel sikerrel oldhatók meg a témakörbe tartozó feladatok.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A valós számok halmaza nem megszámlálható.</p> <p>A valós számok halmazának és irracionális számok halmazának ekvivalenciája. A megszámlálható és a kontinuum számosság. Valós számok és végtelen hosszú 0-1 sorozatok ekvivalenciája.</p> <p>A Cantor-féle átlós módszer; [a Cantor-axióma alkalmazásával annak igazolása, hogy pl. a $[0;1]$ intervallum valós számai nem megszámlálhatók].</p> <p>Hatványhalmaz. A kisebb-nagyobb fogalma a számosságok körében; tranzitivitása, ekvivalenciatétel [bizonyítással]; Cantor-tétel a hatványhalmazról; végtelen sok végtelen számosság van.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Kontinuumhipotézis. König Gyula.</p> <p>[Végtelen gráfok, végtelen fák, végtelen utak. Végtelen fák és gráfok alkalmazása konkrét feladatokban; példa olyan végtelen fára, amelyben van tetszőlegesen hosszú út, de nincs végtelen hosszú út; König-lemma: ha egy végtelen fában minden „emelet” véges, akkor van végtelen hosszú út; Ramsey-tétel végtelen gráfokra.] [A végtelen Ramsey-tétel alkalmazása, pl. tetszőleges sorozatnak van (végtelen) monoton részsorozata.]</p>		<p><i>Filozófia:</i> Zénón paradoxonjai. A halmazelmélet fejlődésének hatása a modern filozófiára.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 4 óra
Előzetes tudás	Állítások; kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik; relációk, ekvivalenciarelációk, rendezési relációk. Boole-algebra.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A formális logika elmeinek megismerése. A bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása. Az axiomatikus felépítés szükségességének, fontosságának megértése, egyszerűbb axiomatizálások végigkövetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása.</i> [Összefüggések a rekurzió, az algoritmus fogalmának különböző matematikai alakjai között. Az algoritmussal való megoldhatóság korlátai. Példák algoritmussal megoldhatatlan problémákra.]</p> <p>[Különböző példák algoritmizálható „létezés” bizonyításokra (gráfelméletben, kombinatorikában, számelméletben).]</p> <p><i>Az axiomatikus módszer elemei.</i> Az axióma és az alapfogalom fogalma. Geometriai modellek.</p> <p>Gödel nemteljességi tétele [bizonyítás nélkül].</p> <p>[Normálformák és alkalmazásaik. Az igazságfüggvények; konjunktív és diszjunktív normálformák. Bármely igazságfüggvény kifejezhető akár konjunktív, akár diszjunktív normálformával.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Bourbaki. Hilbert.</p>		<p><i>Filozófia:</i> Formális logika.</p> <p><i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> logikai áramkörök.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Konstruktív és egzisztenciabizonyítás. Axióma.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	Oszthatóság, kongruenciák, számelméleti függvények, diofantikus egyenletek megoldása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Problémamegoldás fejlesztése, az eddigi számelméleti ismeretek rendszerbe foglalása, a matematika néhány megoldatlan problémájának megismertetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A $4k + 1$ alakú prímekekre az $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldható, a $4k - 1$ alakúakra nem.</p> <p>[Elem rendje modulo m, ez osztója $\varphi(m)$-nek. Kvadratikus maradék,</p>		<p><i>Fizika:</i> naptárak és lánc törtek.</p>

<p>nemmaradék. Kvadratikus kongruenciák megoldása prímmódulus esetén.]</p> <p>Lineáris kongruencia rendszerek megoldása, Kínai maradéktétel. Magasabbfokú egyismeretlenes kongruenciák megoldása.</p> <p>[Prímszámok számtani sorozatokban; Csebisev tétele; az n-nél kisebb prímek szorzatának becslése; lánctörtek; Pell-egyenlet; $\sum \frac{1}{p}$ divergens; Minkowski-tétel.]</p> <p>A rácsgeometria elemei. Paralelogramma rács; háromszögrács; rácsegyenes, rácspont, rácsháromszög, üres rácsháromszög. Szabályos rácssokszögek a négyzetrácson. Pick-tétel. [Tetszőlegesen nagy oldalú üres rácsháromszögek létezése. Négyzetrácson négyzeten kívül nincs szabályos sokszög. Bármely egyeneshez tetszőlegesen közel van rácspont. A diofantikus approximáció elemei.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Diofantosz „Aritmetiká”-ja; Pierre Fermat matematikai munkássága; Euler és a Szentpétervári Akadémia; Gauss, a matematika fejedelme; a titkosírás története az ókortól az RSA-ig.</p>		<p><i>Informatika:</i> titkosítás, nagy prímek keresése.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Rács, rácssokszög. Magasabb fokú kongruenciák megoldása. Kongruencia rendszer megoldása.</p>	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Szögfüggvények fogalma, alapvető trigonometriai azonosságok ismerete. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alapvető algebrai struktúrák megkülönböztetése; egész, racionális és valós számok feletti polinomok, transzformáció-csoportok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számfogalom bővítése, számolási készség elsajátítása a komplex számok körében. Algebrai struktúrák megkülönböztetése, műveletek általános vizsgálata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Addíciós tételek. Trigonometrikus egyenletek.</p> <p>A komplex számok testének alaptulajdonságai, számolás komplex számokkal, Moivre-tétel, gyökvonás komplex számokból; egységgyökök. komplex számok geometriai, trigonometriai alkalmazása. A harmadfokú egyenlet megoldása, Cardano képlet. A negyedfokú egyenlet.</p> <p><i>Matematikatörténeti</i> érdekességek a nevezetes szerkeszthetőségi problémákról; eredmények (kockakettőzés, szögharmadolás, a szabályos 17-szög szerkesztése stb.). Tartaglia, Cardano.</p>		<p><i>Művészetek:</i> a szimmetria.</p> <p><i>Fizika:</i> a váltóáram leírása komplex számokkal.</p> <p><i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> a véges testek szerepe a CD-lemezek hibajavító kódjánál.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Harmadfokú egyenlet. Cardano képlet. Komplex számok. Algebra alaptétele. Csoport, gyűrű, test. Interpoláció.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Lineáris algebra	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Vektorok, koordináta-rendszer, valós számok teste. Gauss elimináció.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A lineáris vektorterek megismerése. A függetlenség és összefüggőség fogalmának kialakítása, elmélyítése. Mátrixok, determinánsok használata, lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereinek, lineáris programozás elemeinek megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A tárgyalt fogalmak, módszerek $n = 2$ és $n = 3$ esetben alkotják a törzsanyagot, az $n > 3$ esetek tárgyalása kiegészítő anyag.</p> <p>A lineáris vektortér (a valós számtest felett); lineáris kombináció. A lineáris függetlenség feltétele; egy vektor lineáris függése a többitől és lineárisan összefüggő vektorok közti kapcsolat. [Független rendszer, generátorrendszer, bázis, dimenzió.]</p> <p>Altér; vektorok által meghatározott altér. Lineáris tér alterének egyenlete (normálvektoros egyenletrendszerrel).</p> <p>Lineáris egyenletrendszer, mátrix, mátrixok konstansszorosa, összege, különbsége.</p> <p>Négyzetes mátrix, a determináns és értéke, tulajdonságai. Kifejtési tételek. Mátrixok hatványozása.</p> <p>Területképlet, paralelepipedon térfogata és vegyes szorzat felírása determinánssal. Nevezetes determinánsok (Vandermonde-determináns, ciklikus determinánsok).</p> <p><i>Mátrixszorzás; mátrix rangja.</i> Az inverz mátrix szerepe lineáris egyenletrendszer megoldásánál. Cramer-szabály. Mátrix rangjának meghatározása.</p> <p>[Lineáris vektortér és lineáris egyenletrendszer tetszőleges test felett. A lineáris egyenletrendszer megoldásakor csak azt használtuk fel, hogy az együtthatók egy testből valók; lineáris vektortér tetszőleges test felett definiálható.]</p> <p>[Kombinatorikai, számelméleti példák a lineáris algebra alkalmazására. Mátrixok szorzásának gráfelméleti alkalmazásai. Geometriai transzformációk mátrixai.]</p>		<p><i>Informatika:</i> tömbök használata, számítógépi grafika, képfeldolgozás.</p> <p><i>Fizika:</i> Egyenletrendszerek áramkörök számításánál. Pontrendszer mechanikája. A kvantummechanika sajátérték-problémája.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria és analitikus geometria	Órakeret 50 óra
Előzetes tudás	Az egybevágósági transzformációk, kerületi szögek, a trigonometria alapvető összefüggései.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gondolkodási módszerek fejlesztése, ismerkedés az axiomatikus gondolkodással és építkezéssel, „új, más világok” megismerése.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Az egyenes paraméteres vektoregyenlete.</p> <p>Az egyenes irányvektoros és normálvektoros egyenlete, normálegyenlete; pont és egyenes távolsága.</p> <p>Egyenes koordinátageometriai egyenletei: tengelymetszetes, iránytangenses, egyenlete síkban, egyenletrendszere térben. Sík egyenlete, pont és sík távolsága.</p> <p>Párhuzamos és merőleges egyenesek, síkok egyenlete. Egyenesek, síkok szöge. Egyenesek és síkok közös pontjai.</p> <p>A kör egyenlete síkban, a gömb egyenlete térben.</p> <p>A koordinátageometria alapfeladatai egyenessel és körrel, síkkal és gömbbel kapcsolatban. Érintő egyenlete.</p> <p>A sík hasonlósági transzformációinak jellemzése (egy egybevágósági transzformáció és egy középpontos hasonlóság).</p> <p>Tengelyes affinitás; [általános affinitás, az affinitás területarány-tartó. Ellipszis területe (affinitással).]</p> <p>Kúpszeletek. Elemi és koordináta-geometriai tárgyalás; Ellipszis, hiperbola, parabola. Az alakzatok egyenlete, érintők egyenlete. A kúpszeletek egyenletének és a kétismeretlenes másodfokú egyenletének kapcsolata. A kúpszeletekkel kapcsolatos szerkesztési és bizonyítási feladatok. Kúpszeletek szerkesztése; adott köröket, ill. egyeneseket érintő körök szerkesztése. Pascal- és Brianchon-tétel és alkalmazás. Dandelin-gömb; kúpszeletek főköreire, vezérköreire és egyenesekre vonatkozó tételek, [A párhuzamos vetítés affinitás, minden egyenesen osztóviszonytartó. A pontból való vetítés kettősviszonytartó. A projektív geometria alaptétele.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> A perspektíva és a festészet újjászületése a reneszánsz korában. A híres francia geométerek; Bolyai János élete és eredményei; axiomatikus gondolkodásmód Bolyai előtt és után. [A sík geometriájától a komplex projektív geometriáig.]</p>		<p><i>Filozófia:</i> a didaktikus gondolkodás.</p> <p><i>Fizika:</i> Kúpszeletek és égi mechanika.</p> <p>Az axiomatikus gondolkodás szerepe.</p> <p>Dirac és a projektív geometria.</p> <p><i>Művészetek:</i> A perspektíva. M.S. Escher művészete.</p> <p><i>Informatika:</i> a GeoGebra szoftver használata.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Tengelyes affinitás, hasonlósági transzformáció, illeszkedéstartó transzformáció. Kúpszelet; kúpszelet főköre, vezérköre és vezéregyenes. A kúp síkmetszetei.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények, analízis, a topológia elemei	Órakeret 60 óra
Előzetes tudás	A másodfokú, reciprok és gyökfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk kezelése, sorozat határértékének fogalma és alkalmazása feladatok megoldásában, mértani sorozat ismerete, koordinátageometriai alapismeretek, konvexitás geometriai feladatokban és a fent említett függvények esetén.	

<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A függvényvizsgálat fejlesztése. A végtelen sorozatokkal kapcsolatos szemléletmód kialakítása, az ilyen gondolkodásmód fejlesztése. Egyváltozós függvények elemzése, teljes függvényvizsgálat, az analízis eszközeinek alkalmazása gyakorlati, ill. más tudományágakból származó feladatokban.</p>
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>	<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>A hatványozás és a logaritmus azonosságai. A hatványozás fogalmának kiterjesztése a permanenciaelv segítségével. Az azonosságok biztos használata. Az exponenciális és a logaritmus függvények vizsgálata.</p> <p>A hatványozás és a logaritmus azonosságoknak, valamint a trigonometrikus azonosságoknak a felhasználása egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában. Exponenciális, logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, paraméteres feladatok. Például a $\text{ctg } x + \text{tg } x \geq 2$ egyenlőtlenség megoldása.</p> <p>Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság szempontjából. A konvergencia és a végtelenbe divergálás fogalma. Korlátos számhalmaznak van legnagyobb alsó és legkisebb felső határa; monoton, korlátos sorozat konvergens. A konvergens sorozatok alaptulajdonságai; összeg, szorzat, hányados határértéke [Cauchy-féle konvergencia kritérium]. Az e definíciója: az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat $[\sum \frac{1}{n!}$ sor]. [Bolzano-Weierstrass tétel. Mely sorozatoknak van konvergens részsorozata? Bernoulli-egyenlőtlenség egész, racionális és valós kitevőre.]</p> <p>Példák konvergens és divergens sorozatokra; rekurzióval definiált sorozatok konvergencia vizsgálata. Sorozatok nagyságrendje: az n^k, a^n, $n!$, n^n sorozatok összehasonlítása. [Végtelen lánc törtek.]</p> <p>Végtelen sorok.</p> <p>Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága; alkalmazások:</p> <p>A függvényhatárérték (folytonosság) „sorozatos” és „környezetes” definícióinak ekvivalenciája. A folytonosság és a szakadási helyek. [A Dirichlet- és a Riemann-függvény.] Folytonos függvények alaptulajdonságai: Darboux-tulajdonság, Bolzano tétele, Weierstrass tétele [bizonyítással]. [Példa sehol sem folytonos függvényre: a Dirichlet-függvény.]</p> <p>Differenciálható függvények. A derivált értékének geometriai jelentése. Differenciálási szabályok, láncszabály, az inverz függvény deriváltja. Középérték tételek. Monotonitás, szélsőérték, helyi szélsőérték, konvexitás vizsgálata az első és második deriváltfüggvénnyel. [Egyenlőtlenségek bizonyítása deriválással.] Az elemi függvények folytonossága, differenciálhatósága; deriváltja; ezek felhasználásával tulajdonságaik. [Monoton függvények</p>	<p><i>Fizika:</i> Pillanatnyi sebesség és derivált, munka és integrál, Newton és a differenciálegyenletek stb. Hatványsorok és közelítő képletek. A tömegközéppont.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populációdinamikai modellek.</p> <p><i>Informatika:</i> függvények ábrázolása számítógéppel (Geogebra v. Derive v. Maple).</p>

<p>megszámlálhatóan sok szakadási helye van. Kétféle változós függvények, egyszerűbb komplex függvények folytonossága. Parciális derivált és geometriai jelentése.] [Taylor-formula.]</p> <p>Sorozatok és függvények (véges és végtelen) határértékének meghatározása (az $(1 + \frac{x}{n})^n$ és $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$, $x_n \rightarrow 0$) típusú határértékek; az „1^{végtelen}”, „$\frac{0}{0}$”, „0^{végtelen}”, „$\frac{végtelen}{végtelen}$” típusú határértékek kiszámítása). Függvények folytonosságának megállapítása. A deriválási szabályok alkalmazása; teljes függvényvizsgálat; szélsőérték-feladatok, szöveges feladatok megoldása is (a megfelelő analízisbeli modell megtalálása).</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Newton és Leibnitz, Európa tanítói: a Bernoulliak, küzdelem a precizitással: Cauchy és Abel.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Racionális és valós kitevőjű hatvány, a permanenciaelv.</p> <p>Konvergens sorozat; a végtelenbe divergáló sorozat.</p> <p>Teljes függvényelemzés: periodicitás, monoton szakaszok, szélsőérték, helyi szélsőérték, értékkészlet, konvexitás-konkávitás.</p> <p>Cauchy-féle konvergencia-kritérium. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága; összeg, különbség, szorzat, hányados határértéke, folytonossága; közvetett függvény; jobb és bal oldali határérték; szakadási hely.</p> <p>Függvény végtelenben vett határértéke, a végtelen mint határérték.</p> <p>Az elemi függvények folytonossága. Zárt intervallumon folytonos függvény ; Darboux-tulajdonság. „Patologikus függvény”. Függvény grafikonjának érintője; a differenciálhányados. Többször differenciálható függvény. Inverz függvény deriváltja.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet és kombinatorika		Órakeret 20 óra
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Euler-séta létezésének feltétele, a fa fogalma, algoritmusok készítésének gyakorlata.</p>		
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>Tapasztalatszerzés konkrét gráfokkal és algoritmusok elemzése tetszőleges gráfra. Kombinatorikai megoldó készségszint emelése.</p>		
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>			<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>Hamilton-kör. [Dirac-tétel]</p> <p>Síkbarajzolható gráfok. Példák síkbarajzolható és nem síkbarajzolható gráfokra. Síkbarajzolható gráfok élszámának maximuma. Euler-féle poliédertétel.</p>			<p><i>Informatika:</i> algoritmusok az informatikában.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Párosítás, teljes párosítás, Hamilton kör, síkbarajzolható gráf.</p>		

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Mohó algoritmus. Állapotfüggvény. Invariáns és monovariáns tulajdonság. Adatstruktúrák. Lépésszám. <u>Gráfbejárások</u> .	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Kitekintés az érdeklődés felkeltése céljából az algoritmuselmélet aktuális kérdéseire; az algoritmusok gyakorlati felhasználhatóságának kérdései.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Az anyagrész legtöbb fogalma az informatika és matematika határán helyezkedik el, egy részük informatika órán is tanítható.</i></p> <p>Rendezett adatstruktúrák: bináris fák.</p> <p>[Teljes indukció, rekurzió és program-ciklus kapcsolata.]</p> <p>A számítógép elméleti modellje: Turing-gép.</p> <p><i>Kitekintés az algoritmuselmélet aktuális kérdéseire, az algoritmusok gyakorlati felhasználhatóságának kérdései:</i></p> <p>A matematika szempontjából: [Híresen nehéz feladatok (amikre nem ismert polinomiális algoritmus): Hamilton-kör. NP-teljesség fogalma. Prímtesztek. Prímfaktorizáció nehéz.] [Dijkstra algoritmus és kapcsolódó adatstruktúrák.] Biztonság, titkosítás: [Az RSA-algoritmus.] Az informatika kihívásai: ["kis feladat nagyon gyorsan": algoritmusok párhuzamosíthatósága, Amdahl's law, alternatív számítógépek] ["nagy feladat" emberi időben: adatbányászat, az emberiség által generált adatmennyiség változása, hasznos információ kiszűrése.] [Véletlent használó algoritmusok, pl. Monte-Carlo, gépi tanulás. Közelítő algoritmusok.]</p> <p><i>Matematikatörténet: Milleneumi problémák.</i></p>		<p><i>Informatika: RAM, adatbányászat, párhuzamos programozás, rendezett adatstruktúrák, mesterséges intelligencia.</i></p> <p><i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan: gépi tanulás; közelítő algoritmikus módszerek a természettudományos előrejelzésekben.</i></p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Turing-gép. Bináris fák. NP-teljesség. RSA.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 24 óra
Előzetes tudás	A várható érték és a feltételes valószínűség szemléletes fogalma, diszkrét eloszlások.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség-számítás elvi alapjainak megértése; a szórás fogalmának gyakorlati alkalmazásai, a nagy számok törvényének megértése, alkalmazása. Egyszerű becslések végrehajtása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel. [Markov-láncok felírása (az állapotok jó választása) és a megfelelő valószínűségek kiszámítása. A Markov-láncokhoz tartozó lineáris egyenletrendszerek. A Markov-láncok valószínűségei és várható lépésszámai. Bolyongási feladatok megoldása.]</p> <p>A diszkrét eloszlások (egyenletes, binomiális, hipergeometrikus geometriai) várható értéke és szórása. A binomiális eloszlás mint a hipergeometrikus eloszlás közelítése, alkalmazhatóság.</p> <p>Geometriai valószínűség fogalmának általánosítása, eloszlástípusok Geometriai valószínűséggel megoldható feladatok.</p> <p>A várható érték mint az az érték, amelytől legkisebb a négyzetes eltérés, szórás; tulajdonságok. Egyszerű várható értékek és szórások.</p>		<p><i>Fizika:</i> Statisztikus fizika. A tehetetlenségi nyomaték és a szórás mint rokon fogalmak.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> valószínűség-számítás. Monte-Carlo-módszer. Egyedszámbecslések.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Geometriai valószínűség. Teljes eseményrendszer. Valószínűségi mező. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték, szórás. A nagy számok törvénye.	

12. évfolyam

Heti óraszám: 7 óra

Éves óraszám: 224 óra

Témakörök:

Halmazok	6 óra
Logika	6 óra
Számelmélet	5 óra
Aritmetika és algebra	10 óra
Geometria és analitikus geometria	31 óra
Függvények, analízis, a topológia elemei	35 óra
Gráfelmélet és kombinatorika	15 óra
Algoritmusok	10 óra
Valószínűség-számítás, statisztika	25 óra
Rendszerező összefoglalás	81 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei. Számhalmazok és ponthalmazok. Példák számhalmazokra és ponthalmazokra. Halmazok ekvivalenciája. Megszámlálható halmazok. A „tetszőlegesen sok” és a „végtelen sok” közti különbség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Halmazelméleti szemléletmód fejlesztése. A fontosabb, mélyebb fogalmak ismerete, a matematika fejlődése szempontjából meghatározó ismeretek átadása; olyan példák, eljárások megismerése, amelyekkel sikerrel oldhatók meg a témakörbe tartozó feladatok.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A valós számok halmaza nem megszámlálható.</p> <p>A megszámlálható és a kontinuum számosság.</p> <p>A Cantor-féle átlós módszer.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Kontinuumhipotézis. König Gyula.</p> <p>[Végtelen gráfok, végtelen fák, végtelen utak. Végtelen fák és gráfok alkalmazása konkrét feladatokban; példa olyan végtelen fára, amelyben van tetszőlegesen hosszú út, de nincs végtelen hosszú út; König-lemma: ha egy végtelen fában minden „emelet” véges, akkor van végtelen hosszú út; Ramsey-tétel végtelen gráfokra.] [A végtelen Ramsey-tétel alkalmazása, pl. tetszőleges sorozatnak van (végtelen) monoton részsorozata.]</p> <p>Halmazelméleti antinómiák [a halmazelmélet axiómarendszerei].</p> <p>Ismétlés.</p>		<p><i>Filozófia:</i> Zénón paradoxonjai. A halmazelmélet fejlődésének hatása a modern filozófiára.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 6 óra
Előzetes tudás	Állítások; kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik; relációk, ekvivalenciarelációk, rendezési relációk. Boole-algebra.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A formális logika elmeinek megismerése. A bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása. Az axiomatikus felépítés szükségességének, fontosságának megértése, egyszerűbb axiomatizálások végigkövetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása.</i></p> <p><i>Az axiomatikus módszer elemei.</i> Az axióma és az alapfogalom fogalma. Geometriai modellek.</p> <p>Gödel nemteljességi tétele [bizonyítás nélkül].</p> <p>[Normálformák és alkalmazásaik.</p> <p>Az igazságfüggvények; konjunktív és diszjunktív normálformák.</p> <p>Bármely igazságfüggvény kifejezhető akár konjunktív, akár diszjunktív normálformával.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Bourbaki. Hilbert.</p> <p>Ismétlés.</p>		<p><i>Filozófia:</i> Formális logika.</p> <p><i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> logikai áramkörök.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Konstrukatív és egzisztenciabizonyítás. Axióma.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 5 óra
Előzetes tudás	Oszthatóság, kongruenciák, számelméleti függvények, diofantikus egyenletek megoldása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Problémamegoldás fejlesztése, az eddigi számelméleti ismeretek rendszerbe foglalása, a matematika néhány megoldatlan problémájának megismertetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Bizonyítás nélkül közölt érdekes eredmények a prímszámok eloszlásával kapcsolatban; sejtések, érdekességek.</p> <p>[A felbonthatatlan és a prímtulajdonság kapcsolata. Prím azonos a felbonthatatlannal az egészek gyűrűjében.</p> <p>A számelmélet alaptételének bizonyítása, elemzés; példák más gyűrűkre, ahol a bizonyítás valamelyik lépése nem megy. Euler-egészek; Gauss-egészek. RSA kódolás alapötlete, egyszerűbb kódok kiszámítása]</p> <p>Sok ismétlő példa, ezen keresztül valósul meg a fogalmak ismétlése is.</p>		<p><i>Fizika:</i> naptárak és lánc törték.</p> <p><i>Informatika:</i> titkosítás, nagy prímek keresése.</p>

<i>Matematikatörténet:</i> Diofantosz „Aritmetiká”-ja; Pierre Fermat matematikai munkássága; Euler és a Szentpétervári Akadémia; Gauss, a matematika fejedelme; a titkosírás története az ókortól az RSA-ig.	
Ismétlés	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Rács, rácssokszög. Magasabb fokú kongruenciák megoldása. Kongruencia rendszer megoldása.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Szögfüggvények fogalma, alapvető trigonometriai azonosságok ismerete. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása Alapvető algebrai struktúrák megkülönböztetése; egész, racionális és valós számok feletti polinomok, transzformáció-csoportok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számfogalom bővítése, számolási készség elsajátítása a komplex számok körében. Algebrai struktúrák megkülönböztetése, műveletek általános vizsgálata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Polinomok a racionális, a valós és a komplex számtest felett; A gyökök száma kisebb vagy egyenlő, mint a fokszám. Az algebra alaptétele. (bizonyítás nélkül) Polinomok azonossága (a racionális, a valós és a komplex számok teste fölött). Polinom és polinomfüggvény különbsége; interpoláció, Permutációcsoportok. Csoportok, részcsoportok, gyűrűk, testek (axiómákkal). Testbővítések. Testek és gyűrűk egyszerű tulajdonságai, nullosztó.</p> <p><i>Matematikatörténeti</i> érdekességek a nevezetes szerkeszthetőségi problémákról; eredmények (kockakettőzés, szögharmadolás, a szabályos 17-szög szerkesztése stb.). Tartaglia, Cardano.</p>		<p><i>Művészetek:</i> a szimmetria.</p> <p><i>Fizika:</i> a váltóáram leírása komplex számokkal.</p> <p><i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> a véges testek szerepe a CD-lemezek hibajavító kódjábanál.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Harmadfokú egyenlet. Cardano képlet. Komplex számok. Algebra alaptétele. Csoport, gyűrű, test. Interpoláció.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria és analitikus geometria	Órakeret 31 óra
Előzetes tudás	Az egybevágósági transzformációk, kerületi szögek, a trigonometria alapvető összefüggései.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gondolkodási módszerek fejlesztése, ismerkedés az axiomatikus gondolkodással és építkezéssel, „új, más világok” megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
További forgatva nyújtással megoldható szerkesztési és bizonyítási feladatok. [Egyszerű szerkesztési feladatok, amelyek pl. Bolyainál		<i>Filozófia:</i> a didaktikus

<p>nehezek.] [A Fagnano-feladat, a magasságpont létezése hegyesszögű háromszögben abszolút. A háromszög nevezetes körei. A háromszög további nevezetes pontjai és vonalai: Brocard-pontok, Lemoine-pont, Nagel-pont.]</p> <p>Körbe írható maximális területű n-szög, kör köré írható minimális területű sokszög stb.</p> <p>A kör kerülete és területe.</p> <p>Vetítések (síkról síkra, egyenesről egyenesre), párhuzamos és középpontos. [Projektív geometria.]</p> <p>Poliéder, henger (hasáb), kúp (gúla). Egyenlő oldalú és ortogonális tetraéder. Belsőfelületű paralelepipedon. Beírt és körülírt gömb. Térgeometriai számítások, bizonyítások. Szabályos testek bizonyítással.</p> <p>Terület és térfogat pontosabb fogalma. Konvex alakzatok területe, kerülete (beírt sokszögek kerületének, területének szuprémuma). Gúla, kúp, csonka gúla, csonka kúp, gömb felszíne és térfogata.</p> <p>[A hiperbolikus és a gömbi geometria elemei.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> A perspektíva és a festészet újjászületése a reneszánsz korában. A híres francia geometerek; Bolyai János élete és eredményei; axiomatikus gondolkodásmód Bolyai előtt és után. [A sík geometriájától a komplex projektív geometriáig.]</p>	<p>gondolkodás.</p> <p>Az axiomatikus gondolkodás szerepe.</p> <p>Dirac és a projektív geometria.</p> <p><i>Művészetek:</i> A perspektíva. M.S. Escher művészete.</p> <p><i>Informatika:</i> a GeoGebra szoftver használata.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Tengelyes affinitás, hasonlósági transzformáció, illeszkedéstartó transzformáció. Konvex alakzat területe (beírt sokszögekkel), kerülete. Terület, térfogat.</p>

<p>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</p>	<p>Függvények, analízis, a topológia elemei</p>	<p>Órakeret 35 óra</p>
<p>Előzetes tudás</p>	<p>A másodfokú, reciprok és gyökfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk kezelése, sorozat határértékének fogalma és alkalmazása feladatok megoldásában, mértani sorozat ismerete, koordinátageometriai alapismeretek, konvexitás geometriai feladatokban és a fent említett függvények esetén.</p>	
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A függvényvizsgálat fejlesztése. A végtelen sorozatokkal kapcsolatos szemléletmód kialakítása, az ilyen gondolkodásmód fejlesztése. Egyváltozós függvények elemzése, teljes függvényvizsgálat, az analízis eszközeinek alkalmazása gyakorlati, ill. más tudományágakból származó feladatokban.</p>	
<p>Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>		<p>Kapcsolódási pontok</p>
<p>Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága; alkalmazások.</p> <p>[Kétváltozós és komplex függvények folytonosságával, határértékével kapcsolatos alaptulajdonságok.]</p>		<p><i>Fizika:</i> Pillanatnyi sebesség és derivált, munka és integrál, Newton és a differenciálegyenletek</p>

<p>Differenciálható függvények. A derivált értékének geometriai jelentése. Differenciálási szabályok, láncszabály, az inverz függvény deriváltja. Középtérték tételek. Monotonitás, szélsőérték, helyi szélsőérték, konvexitás vizsgálata az első és második deriváltfüggvénnyel. (Ismétlés)</p> <p>Nyílt halmaz és különböző definícióinak ekvivalenciája; nyílt halmazok; zárt halmazok uniója, metszete.</p> <p>[Halmaz belső, külső és határpontja, nyílt és zárt halmaz, halmaz lezárása, környezet; nyílt halmaz felbontható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítésére. Különböző példák a síkon és a térben nyílt és zárt halmazokra.]</p> <p>[Topologikus tér és altér, diszkrét topológia. Példák különböző egyszerű topologikus terekre.]</p> <p>[Paraméteres, polárkoordinátákkal adott görbék vizsgálata.]</p> <p>[Abszolút és feltételesen konvergens sorok; az elemi függvények sorfejtése, Taylor-sorok].</p> <p><i>Határozott és határozatlan integrál és alkalmazásai. [Példák differenciálegyenletekre és megoldásukra]:</i></p> <p>A határozott integrál fogalma. A felosztás finomításával az alsó összeg nem csökken, a felső összeg nem nő; a határozott integrál létezésének szükséges feltételei; elégséges feltételei. [Példa nem folytonos integrálható függvényre: a Riemann-függvény.] Folytonos függvény integrálja mint a felső határ függvénye differenciálható. A határozatlan integrál fogalma. A Newton-Leibniz-formula. Az integrálszámítás középtértéktétele. Az ívhossz létezésének elégséges feltétele [paraméteres, polárkoordinátás alakban adott görbe által határolt tartomány területe; a görbe ívhossza; súlypont kiszámítása]. [Nullmértékű halmazok. Megszámlálható sok nullmértékű halmaz egyesítése nullmértékű.]</p> <p>Az integrálás technikája (parciális integrálás; helyettesítéssel való integrálás; parciális törtekre bontás). [Szétválasztható változójú és lineáris elsőrendű differenciálegyenletek megoldása; $\frac{1}{1-x}$, $\sin x$, $\cos x$, e^x Taylor sora.]</p> <p>Az integrálszámítás alkalmazása: terület, térfogat, ívhossz, forgásfelület felszíne, súlypont, tehetetlenségi nyomaték.</p> <p>Példák az integrál geometriai, fizikai, kémiai és más alkalmazásaira.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Newton és Leibnitz, Európa tanítói: a Bernoulliak, küzdelem a precizitással: Cauchy és Abel.</p> <p>Ismétlés.</p>	<p>stb. Hatványsorok és közelítő képletek. A tömegközéppont.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populációdinamikai modellek.</p> <p><i>Informatika:</i> függvények ábrázolása számítógéppel (Geogebra v. Derive v. Maple).</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Teljes függvényelemzés: periodicitás, monoton szakaszok, szélsőérték, helyi szélsőérték, értékkészlet, konvexitás-konkavitás.</p> <p>Konvergens síkbeli és térbeli pontsorozat; komplex számsorozat</p>

	<p>határértéke. Cauchy-féle konvergencia-kritérium. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága; összeg, különbség, szorzat, hányados határértéke, folytonossága; közvetett függvény; jobb és bal oldali határérték; szakadási hely.</p> <p>Függvény végtelenben vett határértéke, a végtelen mint határérték.</p> <p>Az elemi függvények folytonossága. Függvény grafikonjának érintője; a differenciálhányados. Többször differenciálható függvény. Belső, külső és határpont, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz.</p> <p>Inverz függvény deriváltja. Felosztás, felosztássorozat, finomítás, alsó és felső összeg, közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál.</p>
--	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet és kombinatorika	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Euler-séta létezésének feltétele, a fa fogalma, algoritmusok készítésének gyakorlata.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Tapasztalatszerzés konkrét gráfokkal és algoritmusok elemzése tetszőleges gráfra. Kombinatorikai megoldó készségszint emelése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Független élek és független pontok. A mohó algoritmus szuboptimális független él- és pontrendszerek keresésére.</p> <p>Euler-féle poliédertétel. [Ötszín-tétel. Gömbre rajzolható gráfok.]</p> <p>Páros gráfokra vonatkozó tételek és algoritmusok. [König-tétel (teljes párosításra), Hall-tétel, Frobenius-tétel. Reguláris páros gráfban van teljes párosítás, egyfaktorok uniója. Hasonló komplementer-feladatok korábbról (Euler-séta, páros gráf színezése, összefüggőség, feszítő fa keresése).]</p> <p>[Alsó és felső becslés G és komplementere kromatikus számának összegére.]</p> <p>[Leszámolási feladatok: Erdős P. Ramsey-ellenpéldája.] [Menger-tétel.]</p> <p>Permutációk különböző felírási módjaival megoldható feladatok. Permutációcsoportok (testek egybevágóságai és gráfok automorfijája segítségével is). További kombinatorikai feladatok. <i>Matematikatörténet:</i> XX. századi magyar eredmények a gráfelméletben. A négyszín-tétel: az első számítógépes bizonyítás. Ismétlés</p>		<p><i>Informatika:</i> algoritmusok az informatikában.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Párosítás, teljes párosítás, Hamilton kör, síkbarajzolható gráf. Permutációk szorzása. Permutációcsoport.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Mohó algoritmus. Állapotfüggvény. Invariáns és monovariáns tulajdonság. Adatstruktúrák. Lépésszám. <u>Gráfbejárások</u> .	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Kitekintés az érdeklődés felkeltése céljából az algoritmuselmélet aktuális kérdéseire; az algoritmusok gyakorlati felhasználhatóságának kérdései.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Az anyagrész legtöbb fogalma az informatika és matematika határán helyezkedik el, egy részük informatika órán is tanítható.</i></p> <p>A számítógép elméleti modellje: Turing-gép.</p> <p><i>Kitekintés az algoritmuselmélet aktuális kérdéseire, az algoritmusok gyakorlati felhasználhatóságának kérdései:</i></p> <p>A matematika szempontjából: [Híresen nehéz feladatok (amikre nem ismert polinomiális algoritmus): Hamilton-kör. NP-teljesség fogalma. Prímteszték. Prímfaktorizáció nehéz. Dijkstra algoritmus és kapcsolódó adatstruktúrák.] Biztonság, titkosítás: [Az RSA-algoritmus.]</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Milleneumi problémák.</p> <p>Ismétlés</p>		<p><i>Informatika:</i> RAM, adatbányászat, párhuzamos programozás, rendezett adatstruktúrák, mesterséges intelligencia.</p> <p><i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> gépi tanulás; közelítő algoritmusok módszerei a természettudományos előrejelzésekben.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Turing-gép. Bináris fák. NP-teljesség. RSA.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	A várható érték és a feltételes valószínűség szemléletes fogalma, diszkrét eloszlások.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség-számítás elvi alapjainak megértése; a szórás fogalmának gyakorlati alkalmazásai, a nagy számok törvényének megértése, alkalmazása. Egyszerű becslések végrehajtása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel.</p> <p>A diszkrét eloszlások (egyenletes, binomiális, hipergeometrikus geometriai) várható értéke és szórása.</p> <p>A binomiális eloszlás mint a hipergeometrikus eloszlás közelítése, alkalmazhatóság.</p>		<p><i>Fizika:</i> Statisztikus fizika.</p> <p>A tehetetlenségi nyomaték és a szórás mint rokon fogalmak.</p>

<p>Geometriai valószínűség fogalmának általánosítása, eloszlástípusok Geometriai valószínűséggel megoldható feladatok.</p> <p>Markov-egyenlőtlenség. Csebisev-egyenlőtlenség. A nagy számok törvénye.</p> <p>[Integrál felhasználása a valószínűség-számításban. Folytonos eloszlások, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény.] [Konfidencia-intervallum. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlás segítségével. Standard normális eloszlás, $\Phi(x)$ függvény. Becslési módszerek a valószínűségre a normális eloszlás segítségével. Közvéleménykutatások kiértékelése. Gyakorlati alkalmazások.]</p>	<p><i>Biológia-egészségtan:</i> valószínűség-számítás. Monte-Carlo-módszer. Egyedszámbecslések.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Geometriai valószínűség. Teljes eseményrendszer. Valószínűségi mező. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték, szórás. A nagy számok törvénye.</p>

**A fejlesztés várt
eredményei a két
évfolyamos ciklus
végén**

Halmazok

- A kontinuum számosság fogalmának ismerete.
- A hatványhalmaz ismerete.
- Számosságok közötti kisebb-nagyobb reláció.
- A Cantor-féle átlós módszer.

Logika

- Bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása.
- Az axiomatikus módszer elemeinek megismerése.

Számelmélet

- Magasabbfokú egyismeretlenes kongruenciák megoldása.
- Lineáris kongruenciarendszerek megoldása, kínai maradéktétel.
- Rácsgeometriai feladatok megoldása.

Algebra

- Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása addíciós tételekkel is
- Műveletek elvégzése komplex számokkal
- Komplex számok alkalmazásai
- Harmadfokú egyenlet megoldása Cardano képlettel
- Algebrai struktúrák ismerete
- Polinomok néhány tulajdonságának ismerete
- Nevezetes problémák, eredmények megismerése.
- Néhány algebrai struktúra ismerete.

Lineáris algebra

- Mátrixok használata.
- Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereinek ismerete.
- A lineáris programozás elemeinek ismerete.

Geometria

- A sík hasonlóságainak rendszerezése.
- A terület pontos fogalmának kialakítása.
- Kúpszeletek elemi felépítése.

Analitikus geometria

- Egyenes és kör, sík és gömb egyenlete
- Kúpszeletek analitikus geometriájának megismerése.
- Analitikus geometriai eszközök hatékony kezelése feladatok megoldásában.

Függvények, analízis, topológia elemei

- A végtelen sorozatok és határértékük fogalma, kiszámítása.
- Egyváltozós függvények elemzése, teljes függvényvizsgálat.
- Határozott és határozatlan integrál és alkalmazásai.
- Az analízis eszközeinek alkalmazása gyakorlati, ill. más

tudományágakból származó feladatokban.

Kombinatorika és gráfelmélet

- Fontosabb gráfelméleti fogalmak, tételek biztonságos használata.
- Páros gráfokra vonatkozó ismeretek megszerzése.
- Független élek és pontok fogalmának ismerete.
- A Hamilton kör fogalma.
- Gráfokra vonatkozó ismeretek rendszerezése.
- Permutációk különböző felírási módjainak kezelése.
- Kombinatorikus gondolatok alkalmazása a matematika többi területén.

Algoritmusok

- Turing-gép.
- Bináris fák.

Valószínűség-számítás, statisztika

- Az eloszlások, várható értékük és szórásuk fogalmának megértése és gyakorlati alkalmazásai.
- Néhány valószínűség-számítási egyenlőtlenség ismerete.
- A nagy számok törvényének megértése, alkalmazása.

A matematikai tanulmányok végére a tanulók tudjanak önállóan megoldani matematikai problémákat.

Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat.

Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni (pl. gazdasági, pénzügyi kérdésekben).

Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet, elektronikus eszközöket.

Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni.

A feladatmegoldások során használják helyesen a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket.

A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére.

A helyes érvelésre szoktatással a tanulók rendelkezzenek megfelelő kommunikációs készséggel.

Rendelkezzenek alapvető matematikai kultúrtörténeti ismeretekkel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire.