

Helyi tanterv

Matematika emelt szintű képzés

A kerettanterv „A” változata alapján

11. osztály

Heti 2 óra

11–12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknban.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

Több középiskolában a matematika emelt szintű csoportok tanulói bekapcsolódnak az iskola fakultációs rendszerébe. Ez a 11-12. évfolyamnak szóló kerettantervi fejezet természetesen alkalmas arra, hogy a 11–12. évfolyamos fakultációs csoportokban tanítsák. Ilyen csoportoknál viszont figyelemmel kell lenni arra, hogy ez a tanterv épít az alsóbb évfolyamok emelt szintű tanterveinek néhány elemére. Természetesen ezeket az ismereteket célszerű vagy a 11. év elején, vagy a megfelelő témakör tárgyalása előtt áttekinteni. Ehhez szükség lehet heti egy plusz órára.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezen kívül számonkérésre 15 órát terveztünk.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Ismétlés	Órakeret 7 óra
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Elsőfokú és másodfokú egyenletek, paraméteres feladatok, hasonlóság, geometria, szögfüggvények		

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Kombinatorika	Órakeret 3 óra
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése. Kombinatorikai módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.)</p> <p>Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.</p> <p>Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.</p> <p>Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.</p> <p>(Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, rendszerezés.)</p> <p>Binomiális együtthatók, tulajdonságai.</p> <p>Pascal-háromszög és tulajdonságai.</p> <p>Binomiális tétel.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal.</p> <p>Néhány kombinatorikus geometriai probléma.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Erdős Pál.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Permutáció, variáció, kombináció, művelet, reláció, binomiális együttható.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Valószínűség	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Eseményalgebra.</p> <p>Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> George Boole.</p>		
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése.</p> <p>A modell és a valóság kapcsolata.</p> <p>Szerencsejátékok elemzése.</p> <p>Klasszikus valószínűségi modell.</p> <p>Események összegének, szorzatának, komplementerének</p>		<i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.

<p>valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján. Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.) Geometriai valószínűség. <i>Matematikatörténet: Pólya György, Rényi Alfréd.</i></p>	
---	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	4. Hatvány, gyök, logaritmus	Órakeret 11 óra
Előzetes tudás	Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, n-edik gyök, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalma. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedezése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismételése. Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel. Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal. A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra. Az exponenciális függvény. Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.</p>		<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> kamatszámítás, hitelfelvétel, törlesztőrészlet-számítás. <i>Fizika:</i> radioaktivitás.</p>
<p>Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása.</p>		<p><i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).</p>
<p>Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival. A logaritmus fogalma. Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel. A logaritmus azonosságai. Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra. Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az</p>		<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> zajszennyezés. <i>Kémia:</i> pH-számítás.</p>

azonosságok kétirányú alkalmazásánál. A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására. <i>Matematikatörténet:</i> Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.	
A logaritmusfüggvény. A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata. Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata. Inverz függvénykapcsolat.	<i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.
Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.	
Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.	
Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Racionális kitevőjű hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	5. Trigonometria	Órakeret 14 óra
Előzetes tudás	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy újszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is. A függvény szemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése: <ul style="list-style-type: none"> – a vektor fogalma, – vektorműveletek, – vektorfelbontás. A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik. A vektor 90° -os elforgatottjának koordinátái.	
A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvények közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények.	<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása. <i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése

<p>A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás. A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.</p>	<p>számítógépes programmal.</p>
<p>Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban. Merőleges vektorok skaláris szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével. A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata. Vektorok vektoriális szorzata. Szemléletes kép, bizonyítások nélkül.</p>	<p><i>Fizika:</i> munka, elektromosság.</p>
<p>A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével. A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével. Szinusztétel. Koszinusztétel. A tételek pontos kimondása, bizonyítása. Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel. Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is. Bizonyítási feladatok.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak meghatározása. <i>Földrajz:</i> távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS-helymeghatározás.</p>
<p>Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek:</p> <ul style="list-style-type: none"> – két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, – egy szög kétszeresének szögfüggvényei, – félszögek szögfüggvényei, – két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása. <p>A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel. Tangenstétel.</p>	
<p>Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése. Trigonometrikus egyenlőtlenségek. Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása. Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata. Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.</p>	<p><i>Fizika:</i> rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	6. Koordinátageometria	Órakeret 13 óra
Előzetes tudás	Koordináta-rendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A Descartes-féle koordináta-rendszer. A helyvektor és a szabadvektor. Rendszerező ismétlés.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Vektor abszolútértékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.		
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái. Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.		<i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.
Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata. Az egyenes egyenletei. – Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete. – Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben. – Iránytényezős egyenlet. Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása. Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes szöge. Skaláris szorzat használata.		<i>Fizika:</i> mérések értékelése. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.

A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések.		
A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes. A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés. A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.		<i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszapillantó tükör.
Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy a szerkesztés menetének követésével. Mértani helyek keresése. Apollóniosz-kör. Merőleges affinitással kapott mértani helyek. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenlőtlességgel megadott egyszerű feltételek. Lineáris programozási feladat.		<i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	7. Sorozatok	Órakeret 16 óra
Előzetes tudás	Számítási sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. Rekurzív sorozat n -edik elemének megadása. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.		<i>Informatika:</i> algoritmusok.
Számítási sorozat. A számítási sorozat n -edik tagja. A számítási sorozat első n tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat n -edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. Számítási feladatok számítási és a mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számítási sorozat mint lineáris és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjárdék.		<i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> lineáris és exponenciális folyamatok. <i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> hitel – adósság – eladósodás.

<p>Véges sorok összegzése. Számítási és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése. Teleszkópos összegek. <i>Matematikatörténet: Fibonacci.</i></p>	
<p>Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Torlódási pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.</p>	
<p>Végtelen sorok. Végtelenen sor konvergenciája, összege. Végtelen mértani sor. Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása. További példák konvergens sorokra. Teleszkópos összegek. Négyzetszámok reciprokainak összege. Példák nem konvergens sorokra. Harmonikus sor. Feltételesen konvergens sorok.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.</p>